Beschreibung des Ladevorgangs bei einer Induktivität

Schaltung: An eine Serienschaltung eines Widerstandes R und einer Induktivität L wird zum Zeitpunkt t=0 die Spannung U_0 gelegt (vgl. Heft).

Beachte:
R ist die Summe aus einem Widerstand R_1, der zur Spule tatsächlich in Serie geschaltet wird, und aus dem Widerstand R_{Spule} der Spule selbst; nur bei einer „idealen" Spule (z. B. aus Supraleitern aufgebaut) ist $R_{Spule} = 0$.

Der Gesamtstrom I(t) in diesem Stromkreis setzt sich additiv zusammen aus dem Strom I_0, der sich ausbildet, nachdem sich nach einer längeren Zeitspanne das Magnetfeld in der Spule aufgebaut hat und sich nicht mehr ändert, und aus dem nach der Lenzschen Regel entgegengesetzt zu I_0 fließenden Induktionsstrom I_{ind}:

$$\mathbf{I(t) = I_0 + I_{ind}(t)}$$

Da nach dem Einschalten $I_{ind}(t)$ entgegengesetzt zu I_0 fließt, ist $I_{ind}(t)$ negativ, falls wir die Richtung von I_0 als positiv definieren; man muß also I_0 um $|I_{ind}(t)|$ vermindern, um den resultierenden Gesamtstrom I(t) zu erhalten.

Spezialfälle:
- t=0: $I_{ind}(0) = -I_0$, somit ist $I(0) = 0$
- nach „langer" Zeit t: $I_{ind}(t) \approx 0$, genauer: $\lim I(t) = I_0$ für $t \to \infty$

I_0 ist nach dem Ohmschen Gesetz durch U_0 und R gegeben: $\mathbf{U_0 = R \cdot I_0}$

Vereinbarungen:
U_R = Spannung über R
U_L = U_{ind} = Spannung über L
U_0 = Spannung über der Serienschaltung aus R und L

Vom Ohmschen Widerstand R aus gesehen liegen die Spannungen U_L und U_0 in Reihe; bei einer Reihenschaltung addieren sich die Spannungen:

(1) $\mathbf{U_R = U_0 + U_L}$

Beachte: U_L hat negatives Vorzeichen, falls wir U_0 als positiv definieren.

(2) $\mathbf{U_0 = R \cdot I_0}$

(3) $\mathbf{U_R = R \cdot I(t)}$ (Ohmsches Gesetz)

(4) $\mathbf{U_L = U_{ind} = - L \cdot I'(t)}$

Beachte: $- L \cdot I'(t) < 0$, denn $I'(t) > 0$, da I nach dem Einschalten streng monoton wächst

Setzen wir (2), (3) und (4) in (1) ein, folgt:

$$\mathbf{R \cdot I(t) = R \cdot I_0 - L \cdot I'(t) \quad \Leftrightarrow \quad L \cdot I'(t) = R \cdot [I_0 - I(t)]}$$

Die Funktion I(t) erfüllt somit die Differentialgleichung

(∗) $\mathbf{I'(t) = (R/L) \cdot [I_0 - I(t)]}$

mit der Anfangsbedingung

(∗∗) $\mathbf{I(0) = 0}$

Wir suchen eine Funktion I(t), welche die Anfangswertaufgabe **(∗)**, **(∗∗)** löst. Es läßt sich beweisen, daß die Lösung der Gleichungen **(∗)**, **(∗∗)** eindeutig bestimmt ist; mit einer (selbst durch Raten) gefundenen Lösung ist damit klar, daß es eine weitere Lösung nicht gibt.

Behauptung:

Die Funktion

$$I(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

erfüllt die Gleichungen **(∗)**, **(∗∗)** und ist nach dem Eindeutigkeitssatz die einzige Lösung.

Beweis:

a) $I(0) = I_0 \cdot (1 - e^0) = I_0 \cdot (1 - 1) = 0$ (∗∗) ist erfüllt!

b) $I'(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t})' = I_0 \cdot [-(-\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t})] = \frac{R}{L} \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{R}{L} \cdot [I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} - I_0 + I_0]$

$= \frac{R}{L} \cdot [I_0 - (I_0 - I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t})] = \frac{R}{L} \cdot [I_0 - I(t)]$ (∗) ist erfüllt!

Graph der Funktion **I(t)** für I_0 = 5 A, R = 100 Ω und L = 10 H:

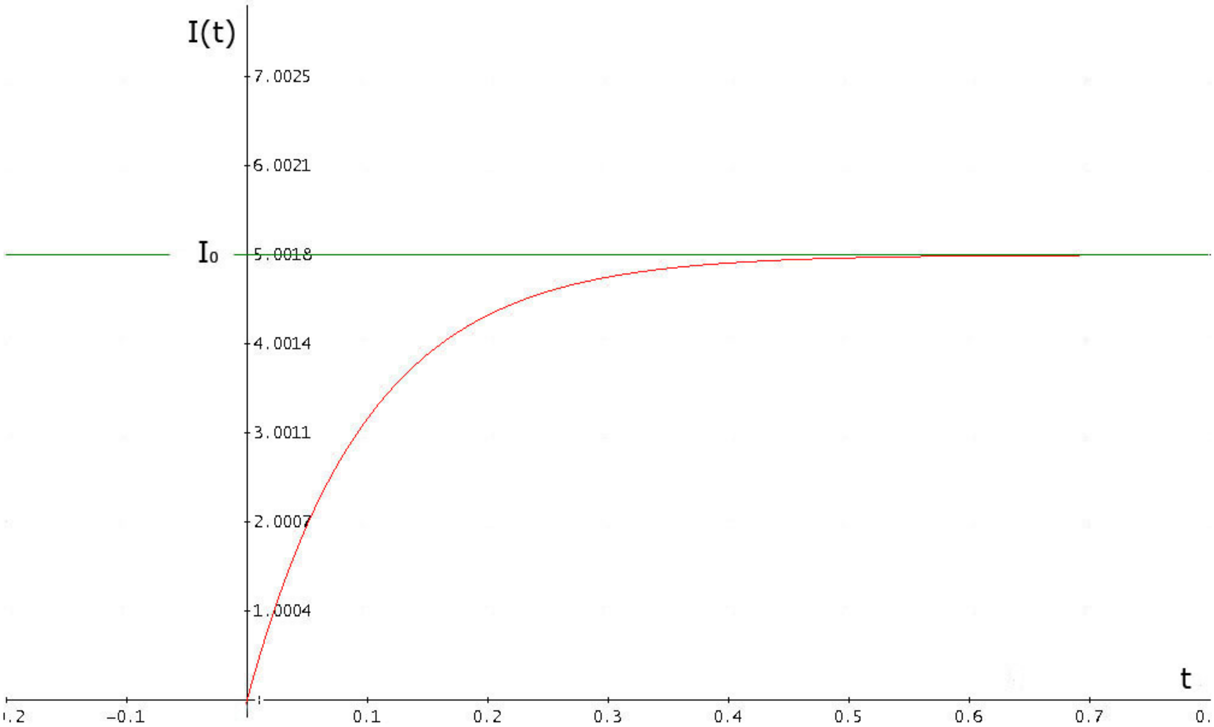

Fig. 1

Wegen

$$\mathbf{U_{ind}(t) = -L \cdot I'(t)}$$

erhalten wir für den zeitlichen Verlauf der Induktionsspannung:

$$U_{ind}(t) = -L \cdot \frac{R}{L} \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -R \cdot I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Graph der Funktion $\mathbf{U_{ind}(t)}$ für I_0 = 5 A, R = 100 Ω und L = 10 H, also U_0 = 500 V:

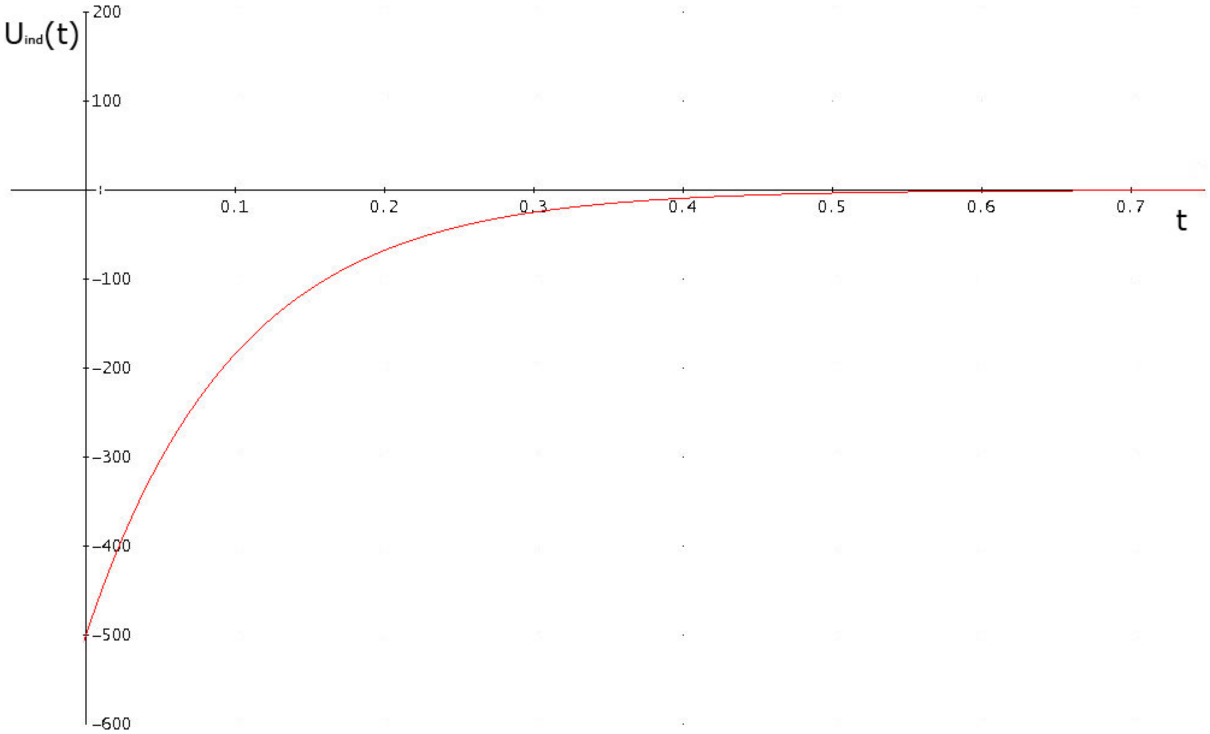

Fig. 2

Zeitkonstante und Halbwertzeit einer LR-Serienschaltung

Definition: Unter der Halbwertzeit t_H verstehen wir diejenige Zeitspanne seit dem Anlegen der Spannung U_0 an die Serienschaltung von L und R, nach der der Gesamtstrom I(t) die Hälfte seines Maximalwertes I_0 erreicht.

Gemäß dieser Definition folgt

$$I(t_H) = \tfrac{1}{2} \cdot I_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{I_0}{2} = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L} t_H})$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{R}{L} t_H} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{R}{L} \cdot t_H = \ln 1 - \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t_H = \frac{L}{R} \cdot \ln 2$$

Der Bruch **L / R** hat die Dimension einer Zeit (wird also in s gemessen) und heißt Zeitkonstante τ .

Es gilt für
- ein LR-Glied: τ **= L / R**
- ein RC-Glied: τ **= R·C**

siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Zeitkonstante .

Halbwertzeit:

$$\mathbf{t_H = \tau \cdot \ln 2}$$

Für R = 100 Ω und L = 10 H folgt: τ **= 0,1s** und $\mathbf{t_H}$ **= 0,1s · ln2 ≈ 0,07 s** (vgl. Fig. 1).

Energie W_{mag} des Magnetfeldes einer vom Strom I_0 durchflossenen Induktivität L

Vorbemerkung: Aus **Leistung = Arbeit / Zeit** bzw. **P = W / t** folgt: **W = P·t**, falls die Leistung zeitlich konstant ist; insbesondere können wir die Arbeit W (das Produkt $P \cdot t_0$), die in der Zeitspanne $[0;\ t_0]$ bei konstanter Leistung P verrichtet wird, als Fläche des Rechtecks mit der Länge t_0 und der Höhe P verstehen. Falls die Leistung als Funktion der Zeit während der Zeitspanne $[0;\ t_0]$ nicht konstant ist, teilen wir das Intervall $[0;\ t_0]$ in n gleichlange Teile der Länge $\Delta t = (t_0 - 0)/n$ und nehmen über jedem dieser Teilintervalle der Länge Δt die Leistung als konstant an, so daß sich als Näherung der Funktion $t \to P(t)$ eine Treppenfunktion ergibt, deren Graph mit der t-Achse eine aus n Teilrechtecken bestehende Treppenfigur einschließt. Der Flächeninhalt der sich aus n Rechtecken der Breite Δt und mit Inhalt $A_i = P(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$, $0 \le i \le n-1$, zusammensetzenden Treppenfigur ist wohldefiniert, und die Arbeit W, die im Zeitintervall $[0;\ t_0]$ verrichtet wird, erhalten wir als Integral (hier: Grenzwert der Untersumme):

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t = \int_0^{t_0} P(t)\,dt$$

P(t) heißt auch Momentanleistung zum Zeitpunkt t.

Wir leiten den Term für $\mathbf{W_{mag}}$ auf zwei Arten her, indem wir

(1) die beim Ladevorgang zugeführte elektrische Energie,
(2) die beim Entladevorgang freigesetzte elektrische Energie

ermitteln; in beiden Fällen ergibt sich dasselbe Ergebnis.

zu (1):

Momentanleistung:

$P(t) = U_{ind}(t) \cdot I_{ind}(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot (-I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}) = R \cdot I_0^2 \cdot e^{-2\frac{R}{L}t}$

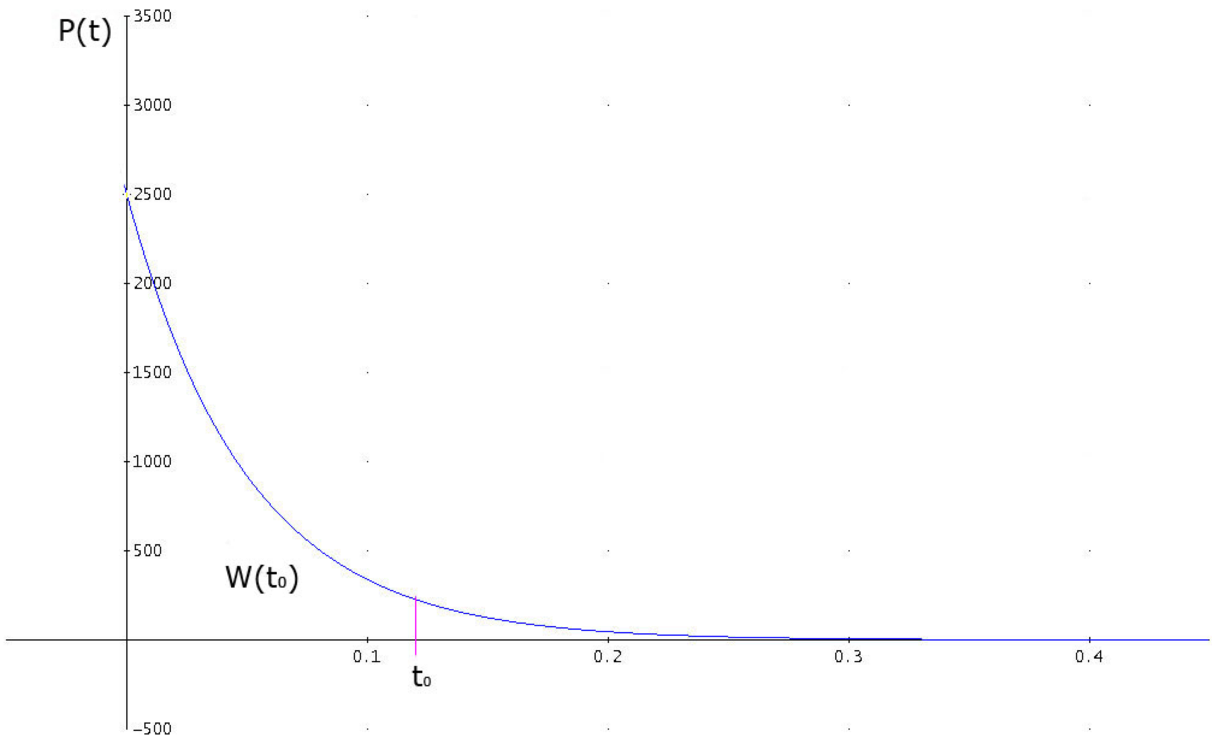

Fig. 3

Magnetische Energie:

$$\mathbf{W_{mag}} = \lim_{t_0\to\infty} W(t_0) = \lim_{t_0\to\infty} \int_0^{t_0} P(t)dt = R \cdot I_0^2 \cdot \lim_{t_0\to\infty} \int_0^{t_0} e^{-2\frac{R}{L}t}dt = R \cdot I_0^2 \cdot \lim_{t_0\to\infty} \left(-\frac{L}{2R}\right) e^{-2\frac{R}{L}t}\Big|_0^{t_0}$$

$$\mathbf{W_{mag}} = R \cdot I_0^2 \cdot \left(-\frac{L}{2R}\right) \lim_{t_0\to\infty} \left[e^{-2\frac{R}{L}t_0} - e^0\right] = R \cdot I_0^2 \cdot \left(-\frac{L}{2R}\right) \lim_{t_0\to\infty} \left[e^{-2\frac{R}{L}t_0} - 1\right] = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$$

zu (2):

Momentanleistung beim Entladevorgang, der zum Zeitpunkt t= 0 beginnt:

$P(t) = U_{ind}(t) \cdot I_{ind}(t) = - L \cdot I_{ind}'(t) \cdot I_{ind}(t) > 0$, da $I_{ind}(t)$ fällt und $I_{ind}'(t)$ folglich negativ ist.

Die im Intervall $[0;\, t_0]$ verrichtete Arbeit $\mathbf{W_{mag}}$ berechnen wir als Integral:

$$W(t_0) = \int_0^{t_0} P(t)dt = -L\int_0^{t_0} I_{ind}(t) \cdot I_{ind}'(t)dt = -\tfrac{1}{2} \cdot L\int_0^{t_0} 2 \cdot I_{ind}(t) \cdot I_{ind}'(t)dt$$

Die Funktion $I_{ind}^2(t)$ ist nach der Kettenregel Stammfunktion zu $2 \cdot I_{ind}(t) \cdot I_{ind}'(t)$:

$$W(t_0) = -\tfrac{1}{2} \cdot L \cdot I_{ind}^2(t)\Big|_0^{t_0} = -\tfrac{1}{2} \cdot L \cdot \left(I_{ind}^2(t_0) - I_{ind}^2(0)\right) = -\tfrac{1}{2} \cdot L \cdot \left(I_{ind}^2(t_0) - I_0^2\right)$$

Durch Grenzübergang $t_0 \to \infty$ erhalten wir

$$\mathbf{W_{mag}} = \lim_{t_0\to\infty} W(t_0) = -\lim_{t_0\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot L \cdot \left(I_{ind}^2(t_0) - I_0^2\right) = -\tfrac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\lim_{t_0\to\infty} I_{ind}^2(t_0) - I_0^2\right) = \tfrac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$$

Bemerkenswert ist – dies gilt auch für die Herleitung gemäß (1) – , daß wir den Funktionsterm zu $I_{ind}(t)$ nicht kennen müssen, um das Integral auszuwerten; vielmehr genügt die Anwendung der Kettenregel, nach der gilt:

$$[I_{ind}^2(t)]' = 2 \cdot I_{ind}(t) \cdot I_{ind}'(t)$$

Falls wir den Strom I_0 mit I_{err} oder I bezeichnen, erhalten wir

$$\mathbf{W_{mag} = ½ \cdot L \cdot I_{err}^2 = ½ \cdot L \cdot I^2}$$

als Energie des magnetischen Feldes B einer vom Strom I_{err} = I durchflossenen Induktivität.

Übungsaufgabe

Zeige:

$$\mathbf{W_{mag} = ½ \cdot H \cdot B \cdot V}$$

mit V = A · l = Volumen der Spule.

Bemerkung: Unter der Energiedichte ρ_{mag} des magnetischen Feldes versteht man den Quotienten $\mathbf{W_{mag} / V}$, somit folgt:

$$\rho_{mag} = \mathbf{½ \cdot H \cdot B}$$