12.11.2007

An eine ideale Induktivität **L** und an eine Kapazität **C** werde die sinusförmige Wechselspannung

$$\mathbf{U(t) = U_0 \sin\omega t}$$

gelegt.

U_0 = Amplitude
$\omega = 2\pi\nu$ = Kreisfrequenz
$\nu = 1/T$ = Frequenz
T = Schwingungsdauer

Durch die Induktivität L fließt der sinusförmige Wechselstrom $I_L(t)$, durch die Kapazität C fließt der sinusförmige Wechselstrom $I_C(t)$.

Behauptung:

Der Strom $I_L(t)$ durch die Induktivität hinkt der über L herrschenden Spannung U(t) um eine Viertelperiode (entsprechend einem Phasenwinkel von $\pi/2 = 90°$) hinterher.

Beweis:

Man kann die über der Spannungsquelle herrschende Spannung U(t) und die über der Induktivität herrschende Spannung $U_L(t)$ als in Reihe geschaltet auffassen, wobei die über dieser Reihenschaltung sich ergebende Spannung $U(t) + U_L(t)$ den Wert 0 hat:

(1) $U(t) + U_L(t) = 0$

Andererseits wissen wir:

(2) $U_L(t) = U_{ind}(t)$, denn über einer Induktivität kann sich nur eine Induktionsspannung ausbilden.

(3) $U_{ind}(t) = - L \cdot I_L'(t)$ (Induktionsgesetz!)

(1), (2) und (3) implizieren:

$$U(t) = L \cdot I_L'(t) \quad \Leftrightarrow \quad I_L'(t) = U(t)/L$$

Der Strom $I_L(t)$ hat also die Eigenschaft, daß seine Ableitung gleich dem 1/L-fachen der Spannung U(t) ist; wir suchen somit eine Stammfunktion zu $U(t)=U_0\sin\omega t$:

$$I_L(t) = \int U(t)/L\, dt = 1/L \cdot \int U(t)\, dt = U_0/L \cdot \int \sin\omega t\, dt = - U_0/(\omega L) \cdot \cos\omega t$$

Der Strom $\mathbf{I_L(t)}$ hat somit die Amplitude $\mathbf{I_0 = U_0 / (\omega L)}$ und ist gegenüber der Spannung $\mathbf{U(t)}$ um eine Viertelperiode „nach rechts“ verschoben, entsprechend einem Phasenwinkel von $+\pi/2$:

$$\mathbf{I_L(t) = - I_0 \cdot \cos\omega t = I_0 \cdot \sin(\omega t - \pi / 2)}$$

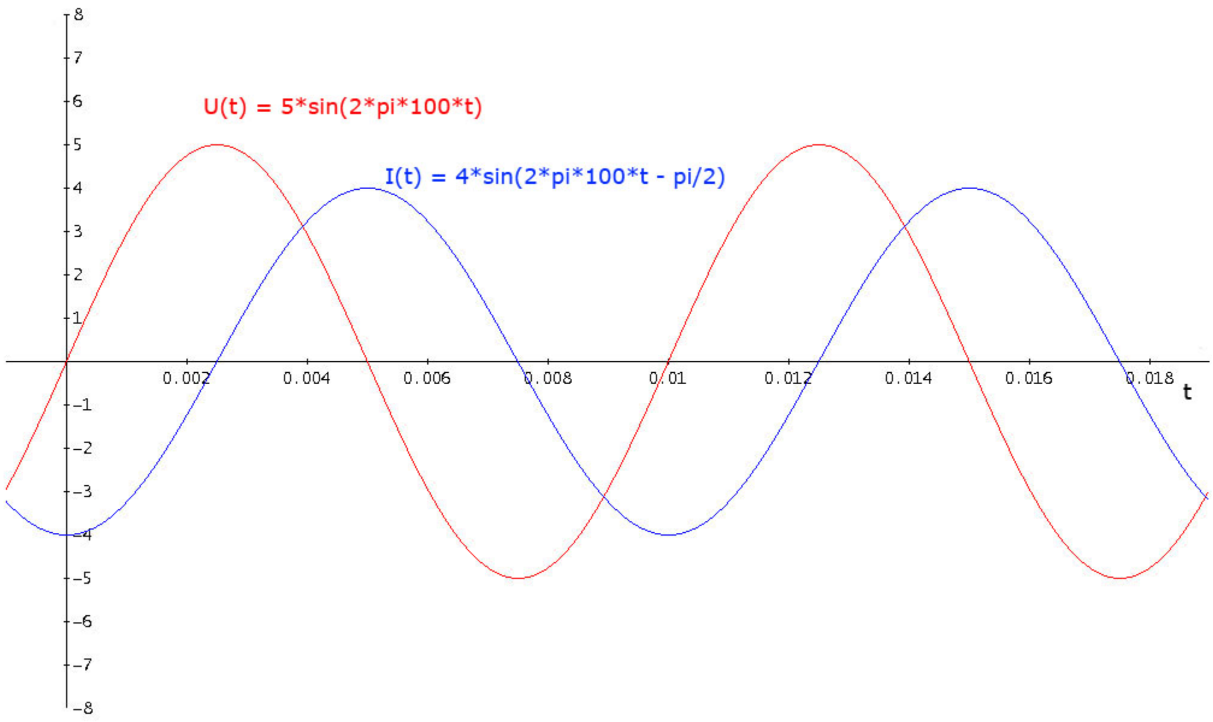
Definition:

Der Quotient $\mathbf{U_0 / I_0}$ der Amplituden $\mathbf{U_0}$ und $\mathbf{I_0}$ heißt Wechselstromwiderstand $\mathbf{R_\sim}$.

Eine Induktivität hat somit den frequenzabhängigen Wechselstromwiderstand

$$\mathbf{R_\sim = \omega L}\ .$$

Schaubilder zu **U(t)** und **I_L(t)** für U_0=5V, ν=100 Hz, I_0=4A:



Behauptung:

Der Strom I_C(t) durch die Kapazität C eilt der über C herrschenden Spannung U(t) um eine Viertelperiode (entsprechend einem Phasenwinkel von $-\pi/2 = -90°$) voraus.

Beweis:

Die Ladung Q(t) auf dem Kondensator folgt streng der angelegten Spannung U(t) gemäß

(1) $Q(t) = C \cdot U(t)$

Andererseits ist die Stromstärke I(t) definiert als zeitliche Ableitung der Ladung Q(t):

(2) $I_C(t) = Q'(t)$

Aus (1) und (2) folgt:

(3) $I_C(t) = C \cdot U'(t)$

Mit $U(t) = U_0 \sin\omega t$ folgt die Behauptung.

Aufgaben:

a) Gib den Funktionsterm für **I_C(t)** an und fertige Schaubilder für **U(t)** und **I_C(t)** an.

b) Bestimme den Wechselstromwiderstand einer Kapazität.

c) Ermittle diejenige Frequenz ω_0, für die der Wechselstromwiderstand einer Induktivität **L** und einer Kapazität **C** betragsmäßig gleich sind.