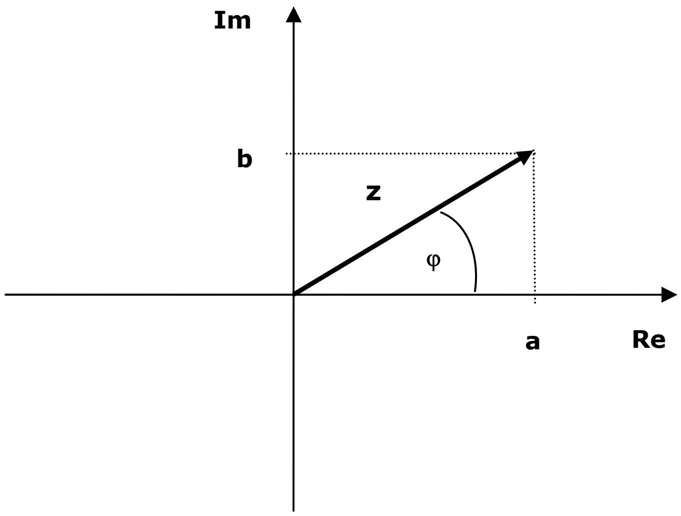
Impedanzen als komplexe Größen

Unter der Imaginären Einheit **i** verstehen wir die Lösung der Gleichung $\mathbf{i^2 = -1}$.

Menge der Komplexen Zahlen:

$\mathbb{C} := \{ \mathbf{z} \mid \mathbf{z = a + b \cdot i} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \}$ **a** = Realteil von **z**, **b** = Imaginärteil von **z**

Eine komplexe Zahl $\mathbf{z = a + b \cdot i}$ läßt sich in einem zweidimensionalen Koordinatensystem („Gaußsche Zahlenebene") als Pfeil mit den Koordinaten (a, b) darstellen:



Im = Imaginärachse
Re = Realachse

Betrag von z:

$|\mathbf{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$

Winkel, den der Pfeil für z mit der Realachse einschließt:

$\varphi = \mathbf{arctan(b/a)}$

Konjugiert-komplexe Zahl:

$\overline{z} = \mathbf{a - b \cdot i}$

MERKE: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$; denn: $z \cdot \overline{z} = \mathbf{(a + b\cdot i)\,(a - b\cdot i) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2} = |z|^2$

RECHENREGELN: ***http://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl***

Falls zwischen der sinusförmigen Wechselspannung

$$\mathbf{U(t) = U_0 \cdot \sin\omega t}$$

und der sinusförmigen Stromstärke **I(t)** eine Phasenverschiebung φ ($-90° \le \varphi \le 90°$, im Bogenmaß: $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$) besteht, definieren wir:

$\varphi > 0$ ⇔ Die Spannung eilt dem Strom voraus (Beispiel: Bei einer Induktivität **L** gilt: $\varphi = \pi/2$).
$\varphi < 0$ ⇔ Der Strom eilt der Spannung voraus (Beispiel: Bei einer Kapazität **C** gilt: $\varphi = -\pi/2$).

Für die gegenüber der Spannung **U(t)** phasenverschobene Stromstärke **I(t)** gilt dann:

$$\mathbf{I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t - \varphi)}$$

DEFINITION

Als Wechselstromwiderstand $\mathbf{R_\sim}$ (In der technischen Literatur auch genannt: Impedanz; wir wollen unter dem Begriff „Impedanz" die komplex geschriebene Größe verstehen, die als Pfeil in der Gaußschen Zahlenebene Informationen über den Betrag $\mathbf{R_\sim = |Z|}$ und die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung enthält.) definieren wir den Quotient aus der Amplitude $\mathbf{U_0}$ der Spannung U(t) und aus der Amplitude $\mathbf{I_0}$ des Stromes I(t):

$$\mathbf{R_\sim = U_0/I_0}$$

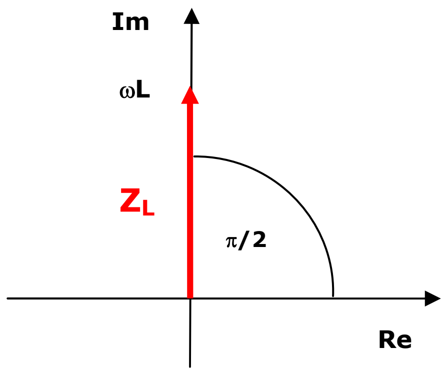
1. Induktivität L

Für die Spannung U(t) gilt nach dem Induktionsgesetz:

$\mathbf{U(t) = U_{ind}(t) = L \cdot I'(t);}$

mit $\mathbf{I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t - \pi/2) = - I_0 \cdot \cos(\omega t)}$ folgt:

$\mathbf{U(t) = L \cdot (- I_0 \cdot \cos(\omega t))' = L \cdot I_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)}$ mit $\mathbf{U_0 = L \cdot I_0 \cdot \omega}$;



$R_\sim = U_0/I_0 = L \cdot I_0 \cdot \omega \,/\, I_0 = \omega L$
$\varphi = \pi/2$

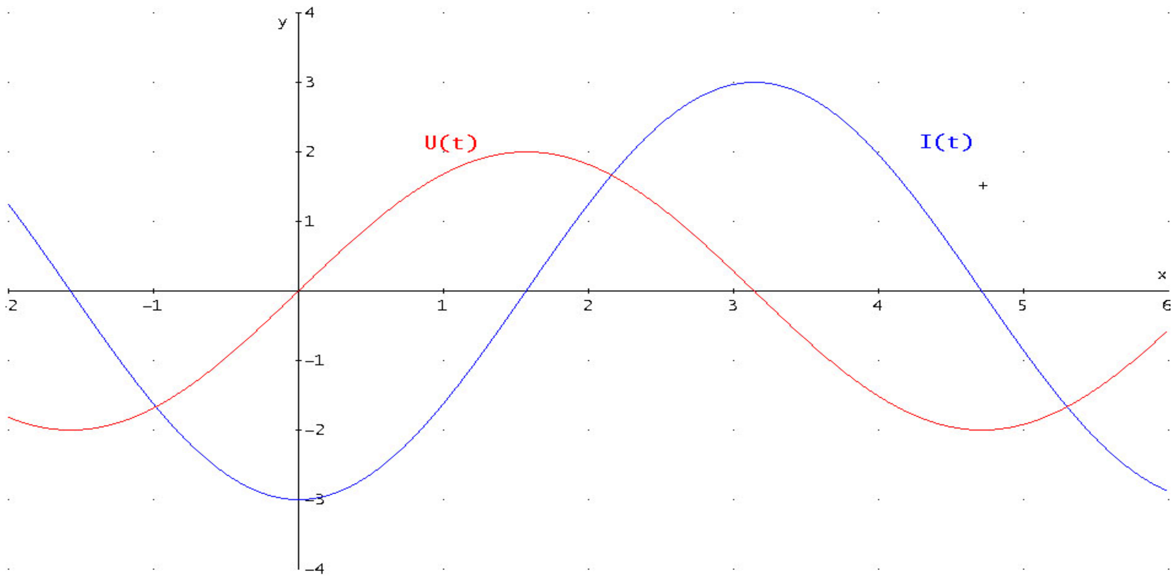
Wir definieren die komplex geschriebene Impedanz **Z_L** einer Induktivität:

$Z_L = i \cdot \omega L$

Dann folgt:
$R_\sim = |Z_L| = |i \cdot \omega L| = \omega L$
$\varphi = \arctan(\omega L/0) = \arctan(\infty) = \pi/2$

Falls jemand sich an der Division durch 0 stört, hier die mathematisch korrekte Formulierung:

$$\varphi = \arctan\left(\lim_{x \to 0} \frac{\omega L}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$



2. Kapazität C

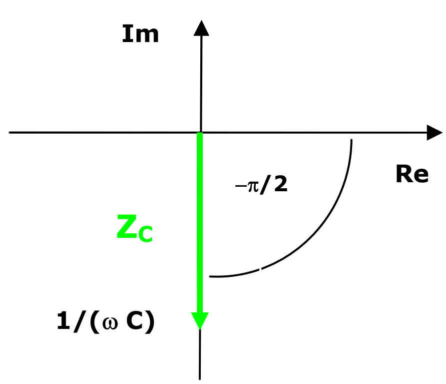
An die Kapazität C wird die sinusförmige Spannung

$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$

gelegt; wegen **$Q(t) = C \cdot U(t)$** folgt die Ladung **$Q(t)$** proportional der Spannung **$U(t)$**, und mit

$I(t) = Q'(t)$ ergibt sich:

$I(t) = (C \cdot U(t))' = C \cdot U'(t) = C \cdot (U_0 \cdot \sin(\omega t))' = C \cdot U_0 \cdot (\sin(\omega t))' = \omega C U_0 \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$
mit **$I_0 = \omega C U_0$** ;
$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \pi/2) = I_0 \cdot \sin(\omega t - (-\pi/2))$



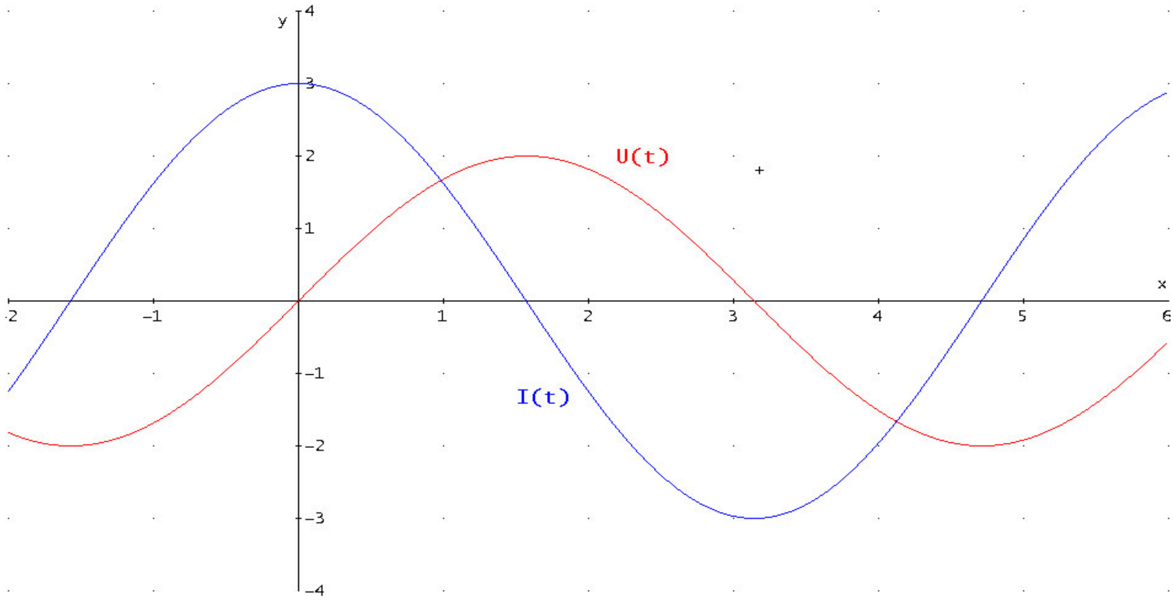
$R_\sim = U_0/I_0 = U_0/(\omega C U_0) = 1/(\omega C)$
$\varphi = -\pi/2$

Wir definieren die komplex geschriebene Impedanz **Z_C** einer Kapazität:

$Z_C = -\dfrac{1}{\omega \cdot C}\, i = \dfrac{1}{i \cdot \omega \cdot C}$

Dann folgt:

$R_\sim = |Z_C| = 1/(\omega C)$
$\varphi = \arctan(-\infty) = -\pi/2$



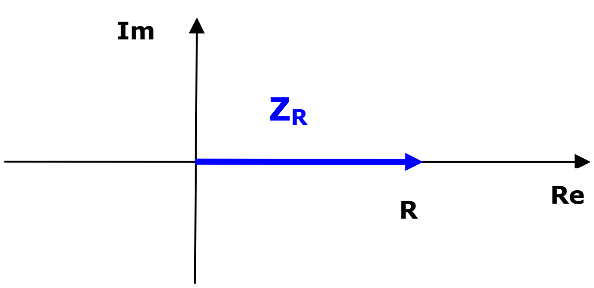
3. Ohmscher Widerstand R

An den Ohmschen Widerstand R wird die sinusförmige Spannung

$\mathbf{U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)}$

gelegt; wegen des Ohmschen Gesetzes $\mathbf{U(t) = R \cdot I(t)}$ folgt die Stromstärke **I(t)** proportional der Spannung **U(t)**, Strom und Spannung sind daher in Phase ($\varphi = 0$):

$\mathbf{I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)}$ mit $\mathbf{I_0 = U_0/R}$

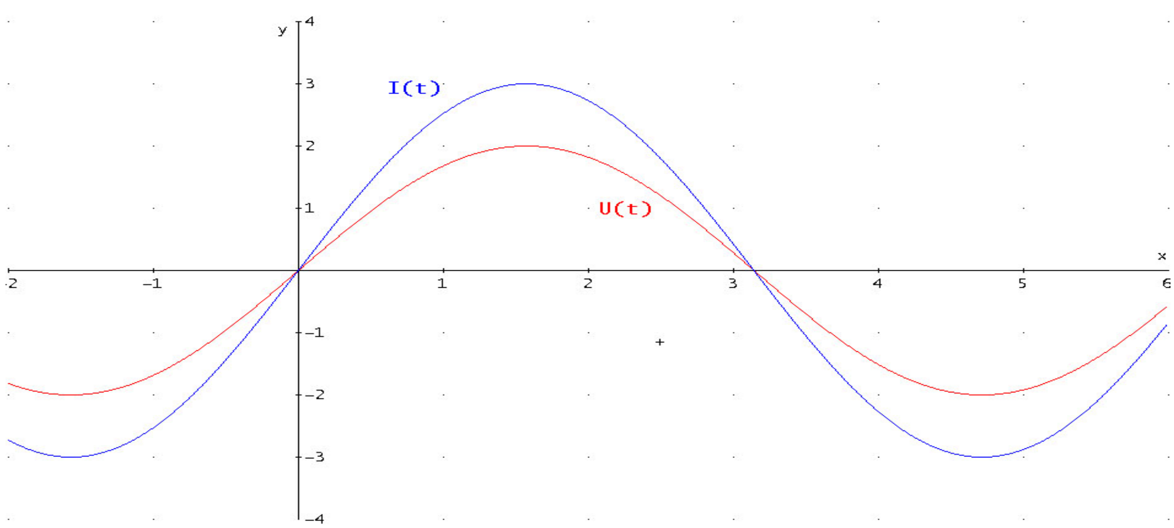


Wir definieren die komplex geschriebene Impedanz $\mathbf{Z_R}$ einer Kapazität:

$\mathbf{Z_R = R + i \cdot 0 = R}$

Dann folgt:

$\mathbf{R_{\sim} = |Z_R| = R}$
$\mathbf{\varphi = \arctan(0) = 0}$



Aufgabe 1: An die Serienschaltung eines Ohmschen Widerstandes R, einer Induktivität L und einer Kapazität C wird die sinusförmige Wechselspannung $\mathbf{U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)}$ mit $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ gelegt.
(Für Berechnungen: R = 20 Ω, L = 25 mH, C = 2 μF, U_0 = 10 V)

a) Ermittle die (komplex geschriebene) Gesamtimpedanz **Z** dieser Serienschaltung sowie den Wechselstromwiderstand $\mathbf{R_\sim = |Z|}$ und den Phasenwinkel φ!

b) Für welche Frequenz ν_0 wird $\mathbf{R_\sim}$ minimal?

c) Stelle den Wechselstromwiderstand $\mathbf{R_\sim}$ und den Phasenwinkel φ als Funktion von ν graphisch dar, und zwar für R = 0 und R = 20 Ω !

d) Welche Amplitude nimmt im Resonanzfall ($\nu = \nu_0$) die Wechselspannung jeweils über L und über C an, wenn man R = 20 Ω (R = 1 Ω) wählt? – Warum verschwindet dennoch die Spannung über der Serienschaltung von L und C im Resonanzfall?

Lösung: a) Bei einer Serienschaltung erhält man die Gesamtimpedanz **Z** als Summe der Einzelimpedanzen:

$$\mathbf{Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L - i/(\omega C)} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

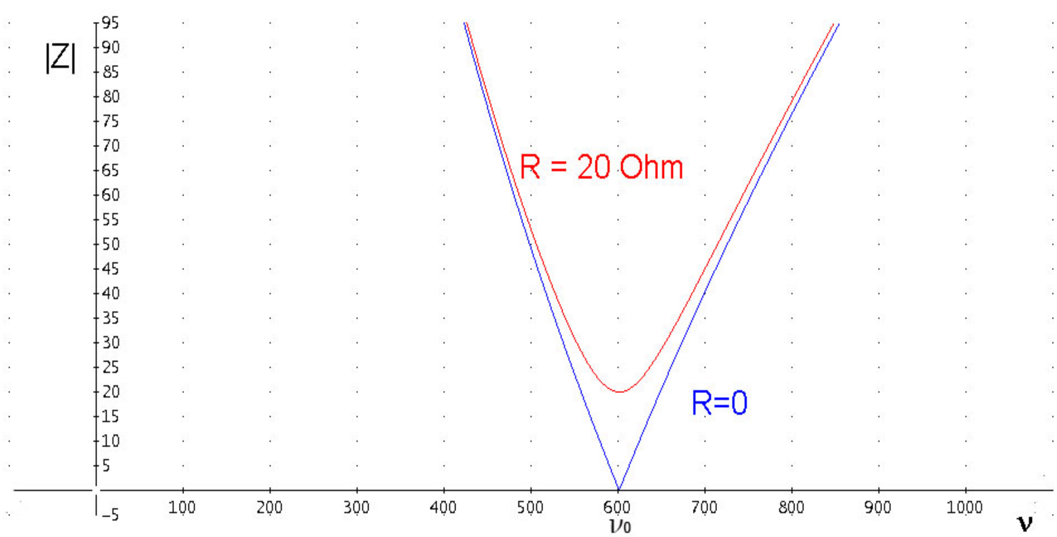
$$\mathbf{R_\sim = |Z|} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)} = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

b) Wegen $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \geq 0$ wird **|Z|** genau dann minimal, falls

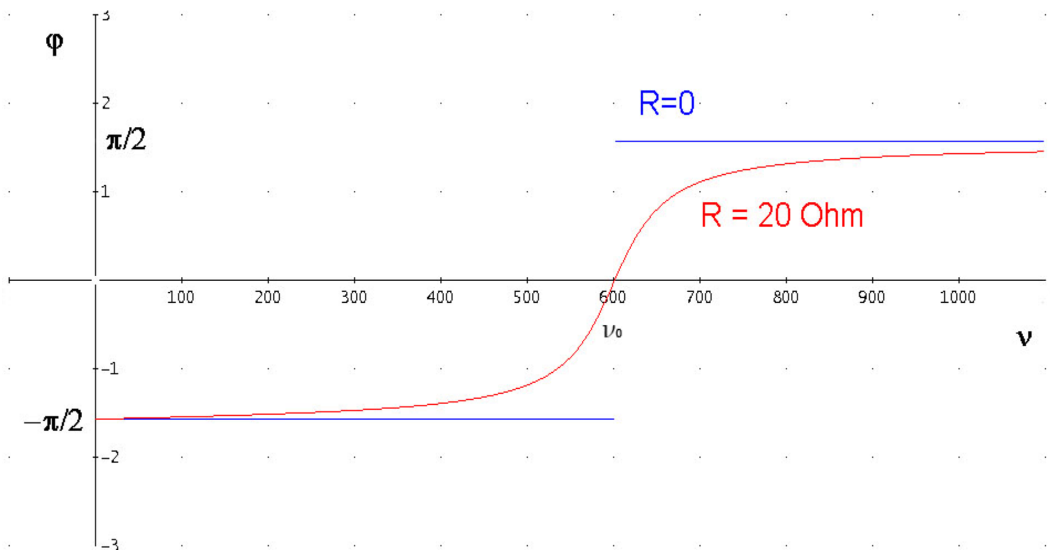
$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \text{(Thompsonsche Formel)}$$

Für $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{3.5\cdot 10^{-4}H \cdot 2.0\cdot 10^{-6}F}} \approx 602 Hz$ gilt: $\mathbf{R_\sim = R}$.

c) |Z| in Abhängigkeit von ν :



φ in Abhängigkeit von ν :



d) Wegen $\mathbf{R_{\sim} = U_0/I_0}$ und $\mathbf{R_{\sim} = R}$ folgt für die Amplitude $\mathbf{I_0}$ des Stromes:

$\mathbf{I_0} = \mathbf{U_0/R = 0{,}5\ A}$

Da bei einer Serienschaltung der Strom an jeder Stelle denselben Wert hat, folgt für die Amplitude $\mathbf{U_{0L}}$ der Spannung über der Induktivität $\mathbf{L}$ bei R = 20 Ω:

$$\mathbf{U_{0L} = R_L \cdot I_0} = \omega_0 \mathbf{L \cdot I_0} = \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{\mathbf{LC}}} \cdot \mathbf{I_0} = \sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{I_0} = \sqrt{\frac{35 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-6}}}\,\Omega \cdot 0{,}5\ \mathrm{A}$$

$$= 100 \cdot \sqrt{1{,}75} \cdot 0{,}5\ \text{Volt}$$

$$\approx \quad 66{,}1\ \mathrm{V}$$

Für R = 1 Ω verzwanzigfacht sich die Amplitude $\mathbf{I_0}$, und die Amplitude $\mathbf{U_{0L}}$ der Spannung über $\mathbf{L}$ steigt auf 1322 V.

Im Resonanzfall $\nu = \nu_0$ gilt: $\mathbf{R_L = R_C}$, somit ist die Amplitude $\mathbf{U_{0C}}$ der Spannung über der Kapazität $\mathbf{C}$ gleich $\mathbf{U_{0L}}$.

Da die Wechselspannung $\mathbf{U_L(t)}$ über $\mathbf{L}$ und die Wechselspannung $\mathbf{U_C(t)}$ über $\mathbf{C}$ eine Phasenverschiebung von π zueinander haben (also gegenphasig sind), heben sich $\mathbf{U_L(t)}$ und $\mathbf{U_C(t)}$ wegen ihrer gleichen Amplitude auf.

Bemerkung: Da die Spannungen über der Induktivität L und über der Kapazität C im Resonanzfall sehr hohe Werte annehmen können, spricht man von Spannungsresonanz.

Aufgabe 2: An die Parallelschaltung einer Induktivität **L** und einer Kapazität **C** wird die sinusförmige Wechselspannung $\mathbf{U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)}$ mit $\omega = \mathbf{2\pi\nu = 2\pi/T}$ gelegt. (Für Berechnungen: L = 25 mH, C = 2 μF)

a) Ermittle die (komplex geschriebene) Gesamtimpedanz **Z** dieser Parallelschaltung sowie den Wechselstromwiderstand $\mathbf{R_{\sim} = |Z|}$ und den Phasenwinkel φ!

b) Für welche Frequenz ν_0 wird $\mathbf{R_{\sim}}$ maximal?

c) Stelle den Wechselstromwiderstand $\mathbf{R_{\sim}}$ und den Phasenwinkel φ als Funktion von ν graphisch dar!