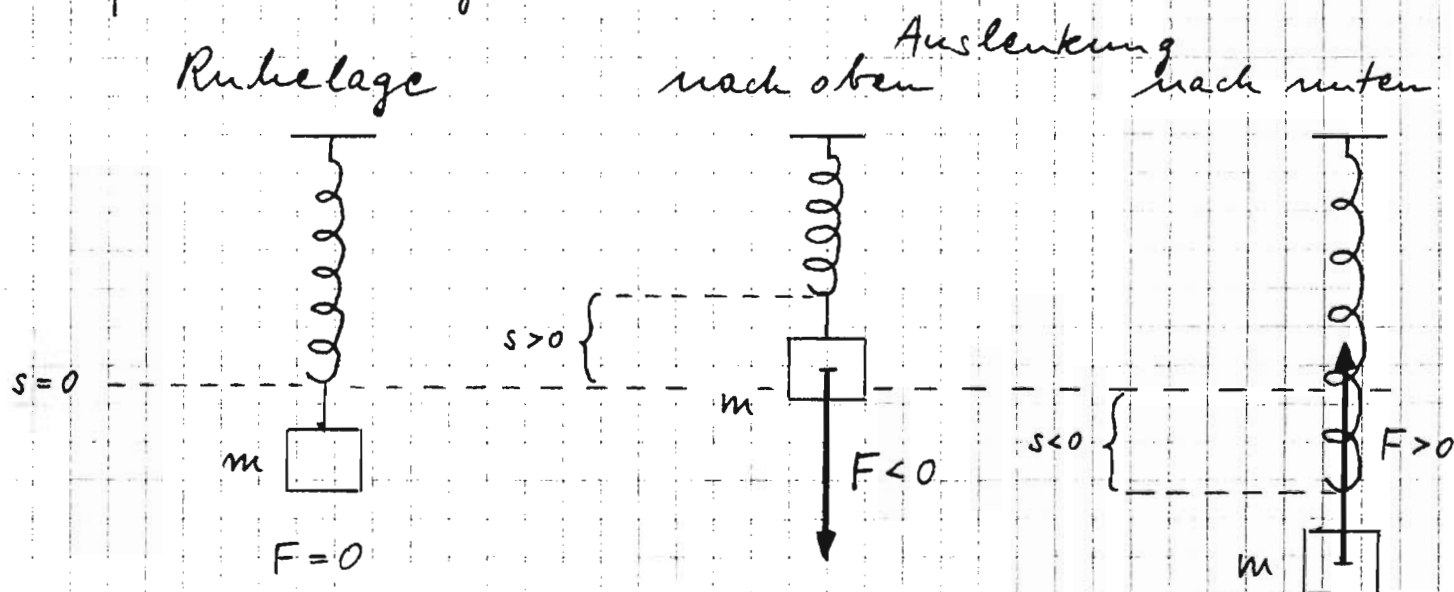


1. DAS FEDERPENDEL

Herleitung und Lösung der Differentialgleichung für die Weg-Zeit-Funktion



Vereinbarungen:

m = Masse des Pendelkörpers, $\downarrow$ = Federkonstante

$s(t)$ = Auslenkung aus der Ruhelage (Elongation)

$\hat{s}$ = maximale Elongation (Amplitude)

$F(t)$ = die auf m wirkende resultierende Kraft, die sich als vektorielle Summe von Gewicht- und Federkraft ergibt

$a(t) = \ddot{s}(t)$ = Beschleunigung, die die Masse m erfährt

$v(t) = \dot{s}(t)$ = Geschwindigkeit der Masse m

$\hat{a}$ = maximale Beschleunigung

$\hat{v}$ = maximale Geschwindigkeit

Vorzeichenkonvention: Elongationen nach oben (unten) sind positiv (negativ), nach oben (unten) gerichtete Kräfte sind positiv (negativ).

Beachte: F ist stets, vom Angriffspunkt aus gesehen, auf die Gleichgewichtslage gerichtet, also eine rücktreibende Kraft!

Es gilt:

$$\textcircled{1} \quad F = -J \cdot s \quad (\text{Hookesches Gesetz})$$

$$\textcircled{2} \quad F = m \cdot a \quad (2. \text{ Newtonsches Axiom})$$

$\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ implizieren

$$m \cdot a = -J \cdot s$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{J}{m} \cdot s \quad (m > 0)$$

Mit $a = a(t) = \ddot{s}(t)$ und $s = s(t)$ erhalten wir folgende Anfangswertaufgabe, bestehend aus der Differentialgleichung (1) und den Anfangsbedingungen (2) und (3):

$$\ddot{s}(t) = -\frac{J}{m} \cdot s(t) \quad (1)$$

$$s(0) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{s}(0) = v(0) = \hat{v} \quad (3)$$

Die Existenz der Lösung der Anfangswertaufgabe ergibt sich daraus, daß man eine Funktion $s(t)$ angibt, welche die Gleichungen (1) - (3) löst.

Die Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe läßt sich auch verifizieren; dabei zeigt sich, daß man bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung (wie z.B. (1)) auch 2 Anfangswerte (2) und (3) benötigt, um Eindeutigkeit zu erhalten. Die mathematische Eindeutigkeit entspricht physikalisch dem Tatbestand, daß die Bewegung durch die Anfangswerte für alle Zukunft festgelegt, also determiniert ist! (Von Reibung sehen wir ab, sonst wäre Gleichung (1) auch komplizierter.)

Nachweis der Existenz einer Lösung:

Setze $\omega := \sqrt{\frac{D}{m}}$.

Behauptung: Die Funktion $s(t) = \hat{s} \cdot \sin \omega t$ löst die Anfangswertaufgabe.

Beweis:

a) Anfangsbedingungen

$\alpha) s(0) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot 0) = 0$ ✓

$\beta) \dot{s}(0) = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot 0) = \omega \cdot \hat{s} = \hat{v}$ ✓

b) Differentialgleichung

Mit $s(t) = \hat{s} \cdot \sin \omega t$ folgt

$$\dot{s}(t) = \omega \cdot \hat{s} \cdot \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{s}(t) = -\omega^2 \cdot \hat{s} \cdot \sin \omega t ;$$

$$\Rightarrow \ddot{s}(t) = -\frac{D}{m} \cdot \hat{s} \cdot \sin \omega t \quad \text{wegen } \omega^2 = \frac{D}{m} ;$$

$$\Rightarrow \ddot{s}(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t), \text{ also ist (1) erfüllt.}$$

Auf den Nachweis der Eindeutigkeit werde hier verzichtet.

Wir erhalten

als Weg - zeit - Funktion:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t$$

als Geschwindigkeit - zeit - Funktion:

$$v(t) = \hat{s} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \cos \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t$$

$$\text{mit } \hat{v} = \hat{s} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

als Beschleunigung - zeit - Funktion:

$$a(t) = -\hat{s} \cdot \frac{D}{m} \cdot \sin \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t$$

$$\text{mit } \hat{a} = -\hat{s} \cdot \frac{D}{m}$$

Schwingungsdauer: $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

(Beachte: T ist von der Amplitude unabhängig!)