Bevor wir zum **Bohrschen Atommodell** kommen, werden zwei Begriffe der Mechanik definiert:

Trägheitsmoment und Drehimpuls

Betrachte die (punktförmige) Masse m, die eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt; der Radius der Bahn sei r, die (betragsmäßig konstante) Geschwindigkeit sei v, und die Umlaufdauer werde mit T bezeichnet. Der Körper m hat die kinetische Energie

$\mathbf{E_{kin} = T = ½\ m\ v^2 = ½\ m\ (2\pi r/T)^2 = ½\ (m\ r^2)}\ \omega^2\ \mathbf{=\ ½\ J}\ \omega^2$ wegen ω $\mathbf{= 2\pi/T}$.

Wir definieren $\mathbf{J := m\ r^2}$ und nennen diese Größe **J „Trägheitsmoment"** oder **„Drehmasse"**; obwohl **J** zunächst nur für eine punktförmige Masse **m**, die eine gleichförmige Kreisbewegung beschreibt, erklärt ist, läßt sich der Begriff „Trägheitsmoment" sinnvoll auf ausgedehnte (also nicht punktförmige) Körper der Masse m erweitern, die um eine Achse rotieren:

Trägheitsmoment

einer **punktförmigen Masse m**, die auf einer Kreisbahn mit **Radius r** gleichförmig rotiert: $\mathbf{J = m\ r^2}$

einer **homogenen Kugel mit Radius r und Masse m** bezüglich einer ihrer Symmetrieachsen: $\mathbf{J = 0{,}4\ m\ r^2}$

eines **homogenen Zylinders mit Radius r und Masse m** bezüglich seiner Symmetrieachse: $\mathbf{J = 0{,}5\ m\ r^2}$

eines **Hohlzylinders mit Radius r und Masse m** bezüglich seiner Symmetrieachse: $\mathbf{J = m\ r^2}$ (dies ist unmittelbar einsichtig!)

Wer genaueres und mehr wissen möchte, sei auf den Mechanik-Band verwiesen, S. 150 ff.

Analog zum linearen Impuls $\mathbf{p = mv}$ einer Masse **m**, die sich gleichförmig geradlinig mit der Geschwindigkeit **v** bewegt, definieren wir den Drehimpuls **L** eines mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Körpers:

$$\mathbf{L = J}\ \omega$$

Lineare Bewegung		**Rotationsbewegung**	
Geschwindigkeit	$\mathbf{v}$	Winkelgeschwindigkeit	ω
Masse	$\mathbf{m}$	Drehmasse	$\mathbf{J}$
Kinetische Energie	$\mathbf{T = ½\ m\ v^2}$	Rotationsenergie	$\mathbf{E_{rot} = ½\ J}\ \omega^2$
Impuls	$\mathbf{p = mv}$	Drehimpuls	$\mathbf{L = J}\ \omega$

Insbesondere hat eine auf einer Kreisbahn mit Radius r gleichförmig mit der Geschwindigkeit v rotierende Masse m (z. B. Planet der Masse m, der um das Zentralgestirn rotiert; Elektron der Masse m, welches um den positiv geladenen Atomkern rotiert) den Drehimpuls

$$\mathbf{L = J}\ \omega\ \mathbf{= m\ r^2}\ \omega\ \mathbf{= m\ r^2\ 2\pi/T = m\ r\ 2\pi r/T = m\ r\ v}$$

Potential und potentielle Energie in einem radialsymmetrischen Feld

a) Gravitationsfeld: $\boldsymbol{\varphi(r) = -\gamma M/r}$ mit

M = felderzeugende Masse (punktförmig oder kugelförmig, im letzteren Falle radialsymmetrisch in der Kugel verteilt)

γ = Gravitationskonstante

r = Abstand zum Mittelpunkt der Masse M

b) Elektrisches Feld: $\boldsymbol{\varphi(r) = c\,Q/r}$ mit

Q = felderzeugende Ladung (punktförmig oder auf einer Kugelsphäre gleichmäßig verteilt)

c = $1/(4\pi\varepsilon_0)$

r = Abstand zum Mittelpunkt der Ladung Q

Beachte: $\varphi(r) > 0$, falls Q positiv ist,
$\varphi(r) < 0$, falls Q negativ ist.

Potentielle Energie einer Probemasse m im Gravitationsfeld:

$$\mathbf{V(r) = m\,\varphi(r) = -\gamma\,Mm/r < 0}$$

Potentielle Energie einer Probeladung q im elektrischen Feld:

$$\mathbf{V(r) = q\,\varphi(r) = Qq/(4\pi\varepsilon_0 r)}$$

Beachte: Die potentielle Energie V(r) ist negativ genau dann, wenn das Potential attraktiv ist (dies gilt stets beim Gravitationsfeld; beim elektrischen Feld z. B. dann, wenn wir die potentielle Energie einer negativen Probeladung q im Feld einer positiven felderzeugenden Ladung Q betrachten).

Die **Gesamtenergie E** mit **E = T + V** eines Körpers (Planet, Elektron), der in einem attraktiven Zentralfeld eine Bahn auf einer Kegelschnittlinie (Ellipse, Parabel, Hyperbel) beschreibt, ist genau dann negativ, wenn die Bahnkurve geschlossen, also eine Ellipse ist. Speziell erhalten wir für den Fall, daß der Körper eine Kreisbahn beschreibt:

$$\mathbf{E = \tfrac{1}{2}\,V < 0}$$

Beweis:

m := Masse des Köpers (beim Gravitationsfeld)
q := Ladung des Körpers (beim elektrischen Feld)
v := Betrag der Bahngeschwindigkeit
M := felderzeugende Masse (beim Gravitationsfeld)
Q := felderzeugende Ladung (beim elektrischen Feld)
r := Bahnradius
F_Z := Betrag der Zentripetalkraft = mv^2/r
F_G := Betrag der Feldkraft (beim Gravitationsfeld)
F_E := Betrag der Feldkraft (beim elektrischen Feld)

o.B.d.A beschränken wir die Herleitung auf ein attraktives radialsymmetrisches elektrische Feld, in diesen Falle gilt:

$F_E = qQ/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$

Gesamtenergie:

$$\begin{aligned} E &= T + V \\ &= \tfrac{1}{2} m v^2 + V(r) \\ &= \tfrac{1}{2} m v^2 + q\,\varphi(r) \quad \text{mit} \quad q\,\varphi(r) < 0 \end{aligned}$$

$= \frac{1}{2}\, m\, v^2 \;+\; Qq/(4\pi\varepsilon_0 r)$ mit $Q>0$, $q<0$
$= \frac{1}{2}\, m\, v^2 \;-\; Qq/(4\pi\varepsilon_0 r)$, wenn wir das Produkt Qq als positiv definieren

Wegen $F_Z = F_E$ folgt

$$mv^2/r \;=\; qQ/(4\pi\varepsilon_0 r^2) \;\Leftrightarrow\; v^2 \;=\; qQ/(m\cdot 4\pi\varepsilon_0 r)$$

Übernehmen wir diesen Term für v^2 in den Term für die Gesamtenergie E, folgt:

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}\, m\, qQ/(m\cdot 4\pi\varepsilon_0 r) \;-\; Qq/(4\pi\varepsilon_0 r) \\ &= -\tfrac{1}{2}\, Qq/(4\pi\varepsilon_0 r) < 0 \\ &= \tfrac{1}{2}\, V(r) \;<\; 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: die Herleitung ergibt sich beim Gravitationsfeld ganz analog.

Das Bohrsche Atommodell für wasserstoffähnliche Atome (1913)

Links:

http://ac16.uni-paderborn.de/lehrveranstaltungen/_aac/vorles/skript/kap_2/kap2_8/text.html

http://www.cip.physik.uni-muenchen.de/~milq/kap12/k124p01.html

Definition: Ein Atom heißt wasserstoffähnlich genau dann, wenn die Hülle nur ein Elektron enthält; Beispiele: H; D; He^+; Li^{++}

Es stellt sich heraus, daß das **Bohrsche Atommodell** wasserstoffähnliche Atome exakt beschreibt, insbesondere **Spektren**, **Ionisationsenergien** und **Radien** dieser Atome mit hoher Genauigkeit erklärt; in anderen speziellen Fällen lassen sich brauchbare Näherungen angeben.

Nils Bohr stellte folgende Postulate auf, um die experimentell gewonnenen Befunde hinreichend durch ein Modell zu erklären, welches auch weitergehende Schlüsse und Vorhersagen zuließ:

1. Das Elektron umläuft den positiv geladenen Atomkern ($Q=Z\cdot e$ mit Z=Kernladungszahl=Ordnungszahl) auf einer Kreisbahn mit Radius r.

2. Dabei sind nur bestimmte Bahnen zulässig, und zwar diejenigen, für die der Bahndrehimpuls L ein ganzes Vielfaches von $h/(2\pi)$ ist:

   $$\mathbf{L = n\cdot h\,/\,(2\pi)} \text{ mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Insbesondere strahlt das Elektron als beschleunigte Ladung auf diesen zulässigen Kreisbahnen keine Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung ab (im Widerspruch zur Klassischen Physik und daher klassisch nicht erklärbar! Die Forderung nach Quantelung des Drehimpulses läßt sich nach klassischem Verständnis der Physik nicht motivieren und muß daher als willkürlich erscheinen)

   Bemerkung: n heißt auch Hauptquantenzahl

3. Ein Elektron kann von einer zulässigen Bahn in eine andere übergehen; erfolgt der Übergang von einer zur Hauptquantenzahl **m** gehörenden Bahn (Gesamtenergie: $\mathbf{E_m}$) in eine zur Hauptquantenzahl **n** gehörende Bahn (Gesamtenergie: $\mathbf{E_n}$) mit $\mathbf{m>n}$ (die zu m gehörende Bahn hat dann einen größeren Radius r_m als die zu n gehörende Bahn mit Radius r_n), so wird ein Photon emittiert, dessen Energie $\mathbf{h\cdot\nu}$ gleich der Differenz dieser Gesamtenergien ist:

   $$\mathbf{h\cdot\nu \;=\; E_m - E_n}$$

Aufgaben:

1. Fertige eine Zeichnung für ein Atom an, dessen Kern von einem Elektron mit der negativen Ladung q=e und der (Ruhe-)Masse m_0 auf einer Kreisbahn mit Radius r umlaufen wird. Insbesondere sind alle physikalisch relevanten Größen (v, F_Z, . . .) einzutragen!
   Der Atomkern bestehe aus Z Protonen, trägt also die positive Ladung $Q=Z\cdot e$.

2. Leite einen Term für die Gesamtenergie $\mathbf{E_n}$ her, die ein Elektron auf einer zur Hauptquantenzahl n gehörenden Kreisbahn hat!
   (eigentlich hat nicht das Elektron die Energie E_n, sondern das Atom als ganzes.)

   Hinweise:

   Auf dieser Kreisbahn gilt nach dem 2. Postulat: $\mathbf{L = m_0 \cdot v \cdot r = n \cdot h / (2\pi)}$;

   Bestimme zunächst den Radius r der Kreisbahn aus den Gleichungen

   $\mathbf{v^2 = Z \cdot e^2 / (m_0 \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r)}$ (Begründung?)

   und

   $\mathbf{m_0 \cdot v \cdot r = n \cdot h / (2\pi)}$

   unter Eliminierung von v!

   Benutze dann das auf den Seiten 2 und 3 gewonnene Ergebnis

   $\mathbf{E_n = ½\ V}$ mit $\mathbf{V = -\ ½\ Qq / (4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r)}$ und $\mathbf{Q = Z \cdot e,\ q = e}$,

   um das folgende Resultat zu erhalten:

$$E_n = -\frac{m_0 \cdot Z^2 \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

3. Verwende das Ergebnis für E_n von Aufgabe 2, um aus

$$\mathbf{h \cdot \nu = E_m - E_n}$$

   die Frequenz des Photons zu berechnen, welches beim Übergang des Elektrons aus der

   α) M-Schale (m=3),
   β) N-Schale (m=4)

   in die L-Schale (n=2) jeweils frei wird.

$m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg
$e \ = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As
$h \ = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eVs $= 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js
$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm)

LK PH 13

Bohrsches Atommodell

Aufgaben zur Übung und Vertiefung   August/September 2012

1. Was versteht man unter
   a) dem **Grundzustand**,
   b) einem **angeregten Zustand**

   eines Atoms?

   Welche Methoden eignen sich, Atome anzuregen?

2. Erarbeitung in eigener Regie:

   Erläutere die Begriffe ***Resonanzfluoreszenz*** und ***Fluoreszenz***!

   Was versteht man unter ***Fraunhoferschen Linien***?

3. Bestimme die **Ionisierungsenergie** und den **Radius** des
   a) He^{+}-Ions
   b) Li^{++}-Ions

   (jeweils im Grundzustand).

4. Man kann **Lithium** näherungsweise wie ein Einelektronensystem behandeln, wenn man für das Elektron der L-Schale die Kernladungszahl **Z** durch $\mathbf{Z_{eff}}$ ersetzt (beachte: der Radius r_n der n-ten Bahn ist proportional zu n^2; von dem einen Elektron der L-Schale aus gesehen befinden sich die beiden Elektronen der K-Schale relativ nahe am Kern!)

   Bestimme Z_{eff}, wenn man die Ionisierungsenergie für das L-Elektron experimentell zu 5,37 eV ermittelt! Deute das Ergebnis.

5. Das **Bohrsche Korrespondenzprinzip**
   a) Bestimme die Frequenz des Photons, welches aus dem Zustand mit der Hauptquantenzahl n+1 (Energie: E_{n+1}) in den Zustand mit der Hauptquantenzahl n (Energie: E_n) übergeht (Z=1, also Wasserstoff-Atom).
      Welche Näherung ergibt sich für große Werte der Quantenzahl n?
   b) Von einem weit entfernten Punkt der Bahnebene, die von dem um den Kern kreisenden Elektron definiert wird, hat man den Eindruck, daß das Elektron sich hin und her bewegt, so wie die Ladung auf einen Dipol (z. B. $\lambda/2$-Dipol) hin und her schwingt.
      Bestimme für die Hauptquantenzahl n die Umlaufzeit T und daraus die Frequenz ν (auch hier sei Z=1).
   c) Vergleiche die Ergebnisse aus a) und b); motiviere so das **Korrespondenzprinzip**, welches Niels Bohr im Jahre 1913 formulierte:
      „Aussagen der Quantenphysik gehen für hohe Quantenzahlen in die ihnen entsprechenden (korrespondierenden) Aussagen der Klassischen Physik über.“

6. Mit der aus dem **Franck-Hertz-Rohr** austretenden Strahlung wird eine Fotozelle beleuchtet, deren Kathode mit Cäsium beschichtet ist. Berechne, welche Geschwindigkeit die ausgelösten Fotoelektronen höchstens haben, wenn man annimmt, daß nur das erste Niveau der Hg-Atome (4,9 eV) angeregt wird.
   Austrittsarbeit bei Caesium: 1,94 eV

7. **Emission und Absorption bei Natrium**
   Durchstrahlt man Na-Dampf, dessen Atome sich im Grundzustand befinden, mit Glühlicht, so stellt man im Spektrum des durchgehenden Lichtes eine dunkle Linie (Absorptionslinie) fest. Die zugehörige Wellenlänge ergibt sich zu $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m.

   a) Erkläre das Zustandekommen dieser dunklen Linie und zeige, daß die zugehörige Anregungsenergie 2,1 eV beträgt.

   Die Anregung der Na-Atome, die stets vom Grundzustand aus erfolgt, werde nun durch Beschuß mit Elektronen durchgeführt. Erreicht die maximale kinetische Energie der Elektronen 3,2 eV, so treten im zugehörigen Emissionsspektrum neben der Linie mit der Wellenlänge $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m erstmals weitere Linien auf.

   b) Zeichne auf der Grundlage der bisherigen Informationen ein Energieniveauschema und berechne die größte im Emissionsspektrum zu erwartende Wellenlänge.

8. **Wasserstoffatom**
   Die Serienformel für das Wasserstoff-Spektrum lautet:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

   wobei R_H die Rydbergkonstante für das Wasserstoffatom ist (Beachte die alternative Formulierung der Serienformel mit der Rydbergkonstanten R_H; man kann auch die äquivalente Formulierung mit der Rydbergfrequenz ν_R verwenden.).

   a) Berechne die Frequenz des Lichts, das in H-Atomen beim Übergang des Elektrons aus der L- in die K-Schale entsteht.

   b) Ermittle mit Hilfe der Serienformel die Ionisationsenergie für ein H-Atom, das sich im ersten angeregten Zustand befindet.

   c) Fertige eine maßstabgetreue Zeichnung der fünf niedrigsten Stufen im Energieniveauschema von Wasserstoff an.

   d) Für welchen Wert von n_1 liegen mehrere Spektrallinien im sichtbaren Bereich? Wie heißt diese Serie?
   Berechne für diese die Wellenlängen derjenigen zwei Übergänge, die zu den kleinsten Energiedifferenzen gehören.

9. **Link** (mit Java-Applet; sehr empfehlenswert!):
   www.physik.tu-berlin.de/institute/IFFP/moses/Subsites/themenseiten/bohr/bohrindex.html

10. **Spektren von He und He^+**
    Das Edelgas Helium wurde 1868 durch seine Fraunhofer-Linien im Sonnenspektrum entdeckt und erst 1895 in Erdgasquellen auf der Erde gefunden.

    a) Zum Spektrum von atomarem Helium (He) gehört u. a. eine Linie mit der Wellenlänge 588 nm. Berechnen Sie die zugehörige Photonenenergie.

Daneben lassen sich aber auch Linien nachweisen, die von einfach ionisiertem Helium (He^+-Ionen) stammen. Gehe zunächst davon aus, daß die Rydbergkonstante des Wasserstoffatoms und diejenige des He^+-Ions gleich groß sind.

b) Berechne die Ionisierungsenergie von He^+, das sich im Grundzustand befindet. [zur Kontrolle: 54,4 eV]

c) Zeige, daß die 2., 4. und 6. Energiestufe des He^+-Ions mit den ersten drei Stufen des H-Atoms übereinstimmen.

d) Die H_α -Linie hat die größte Wellenlänge in der Balmerserie des Wasserstoffatoms. Welcher Übergang im He^+-Ion führt zur Emission einer Strahlung mit dieser Wellenlänge? Begründe Deine Antwort.

e) Tatsächlich ist die Rydbergkonstante des He^+-Ions geringfügig größer als die des H-Atoms. Was folgt daraus für die Wellenlänge der He^+-Linie aus Teilaufgabe d) im Vergleich zur H_α -Linie?

11. Bei **Atomen mit großer Ordnungszahl Z** (bei denen insbesondere die unteren Schalen, also die K-, L-, M-Schale und ggf. höhere Schalen vollständig mit Elektronen besetzt sind), lassen sich Übergänge eines Elektrons

- aus der K-Schale heraus ins Kontinuum (Ionisierung),

- aus der L-, M-, N-Schale in die K-Schale eines Atoms, welches vorher durch Elektronenstoß aus der K-Schale heraus ionisiert wurde

in (sehr guter!) Näherung mit der Bohrschen Energieformel beschreiben, wenn man Z durch $Z_{eff} = Z - 1$ ersetzt (vgl. Aufgabe 4).

a) Motiviere, daß $Z_{eff} = Z - 1$ gute Ergebnisse liefern muß, indem man den Radius der innersten Bahn bei Atomen mit großem Z mit dem Bohrschen Radius vergleicht.
b) Ermittle die Energie E_{ion}, die notwendig ist, um ein Silber-Atom aus der K-Schale heraus zu ionisieren.
c) Nach einen kurzen Zeitspanne (typischerweise 10^{-8} s) füllt ein Elektron aus der L-, M- oder N-Schale die durch Ionisierung in der K-Schale entstandene Lücke unter Emission eines γ-Quants auf. Bestimme die Wellenlängen der K_α- und der K_β-Strahlung bei Silber.

Energieniveauschema Quecksilber

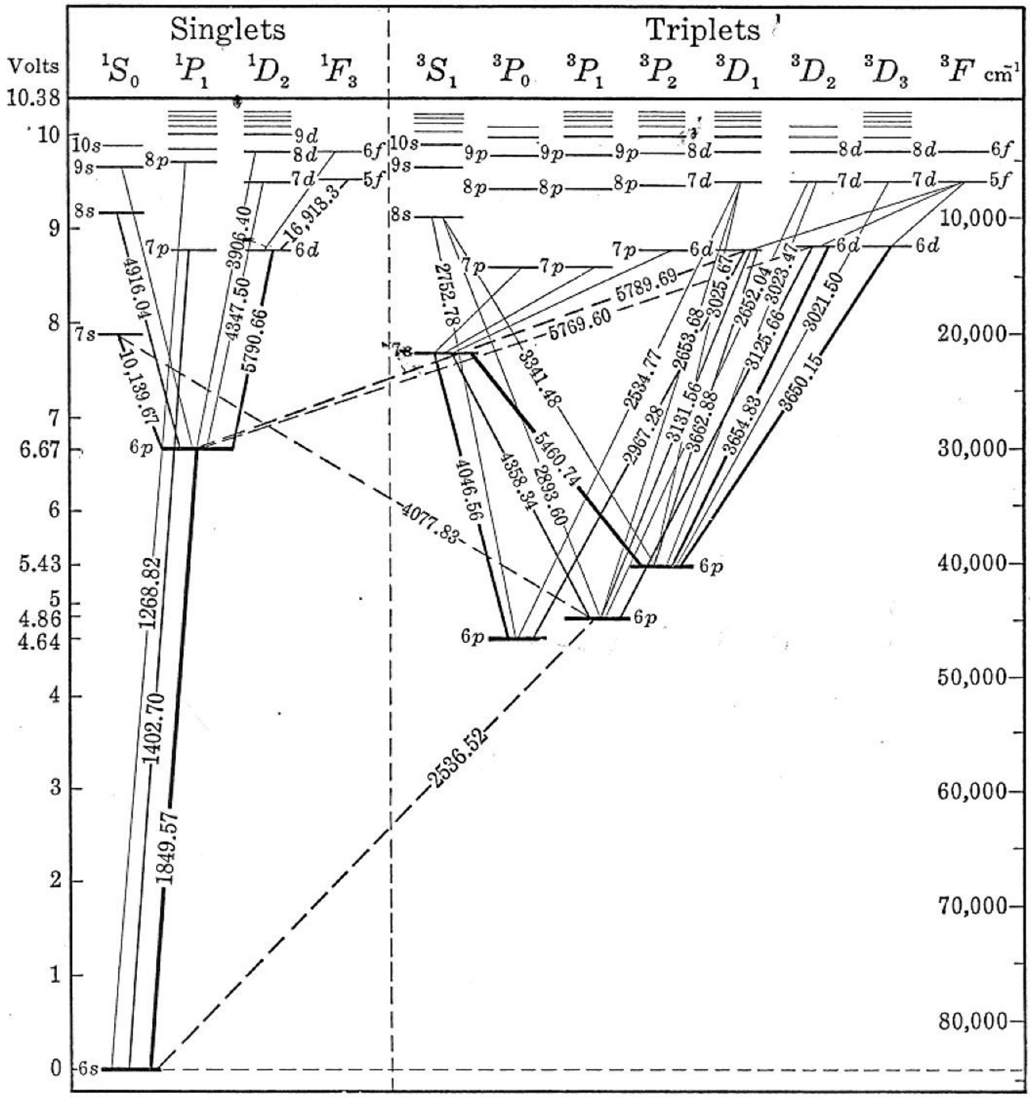

Figure 3 – The energy level diagram for Hg. The outer electron configuration of mercury is very similar to helium, since it has an electron configuration $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^6 d^{10} 4s^2 p^6 d^{10} f^{14} 5s^2 p^6 d^{10} 6s^2$ and helium has $1s^2$. The spectroscopic notation for the states is $^{2S+1}L_J$.