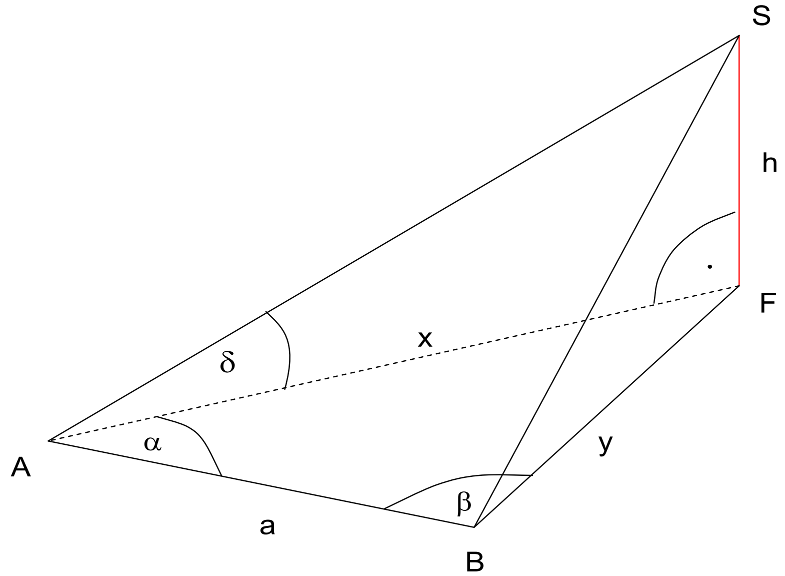
Grundaufgaben der Vermessungskunde

Kopernikus-Gymnasium
Klasse 10c 2001/02

1. Höhenbestimmung

Um die Höhe h eines Berges (Gebäudes, Turmes) zu bestimmen, steckt man in der Ebene eine waagerechte Standlinie a=AB ab und mißt die Horizontalwinkel $\alpha=\angle FAB$ und $\beta=\angle ABF$ sowie den Erhebungswinkel $\delta=\angle SAF$ (zur Kontrolle ggf. auch den Winkel $\varepsilon=\angle SBF$).



Im Dreieck ΔABF gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{x}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(180-(\alpha+\beta))}$$

$$x = \frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Im Dreieck ΔAFS gilt:

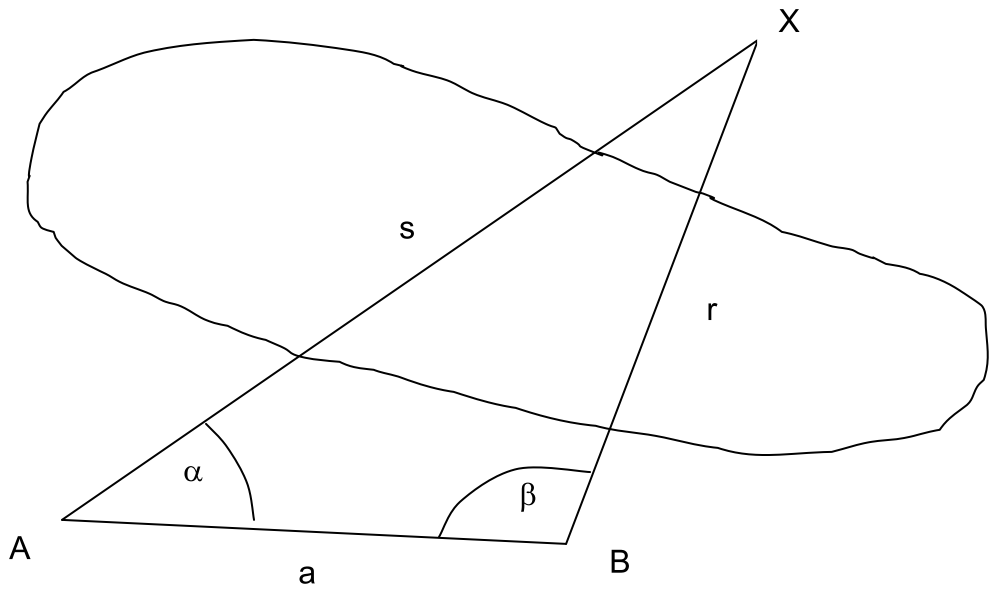
$$h = x\tan(\delta)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen erhalten wir für die Höhe:

$$h = a\frac{\sin(\beta)\tan(\delta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

2. Vorwärtseinschneiden (nach einem Punkt)

Von zwei bekannten Punkten A und B aus, deren Entfernung a bekannt ist, bestimmt man die Winkel $\alpha = \angle XAB$ und $\beta = \angle ABX$, um die Lage des Neupunktes X zu ermitteln.
Bemerkung: Die Strecke a heißt auch „Standlinie“.



Nach dem Sinus-Satz gilt im Dreieck ΔABX:

$$\frac{s}{\sin(\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}$$

aufgelöst nach s:

$$s = \frac{a \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

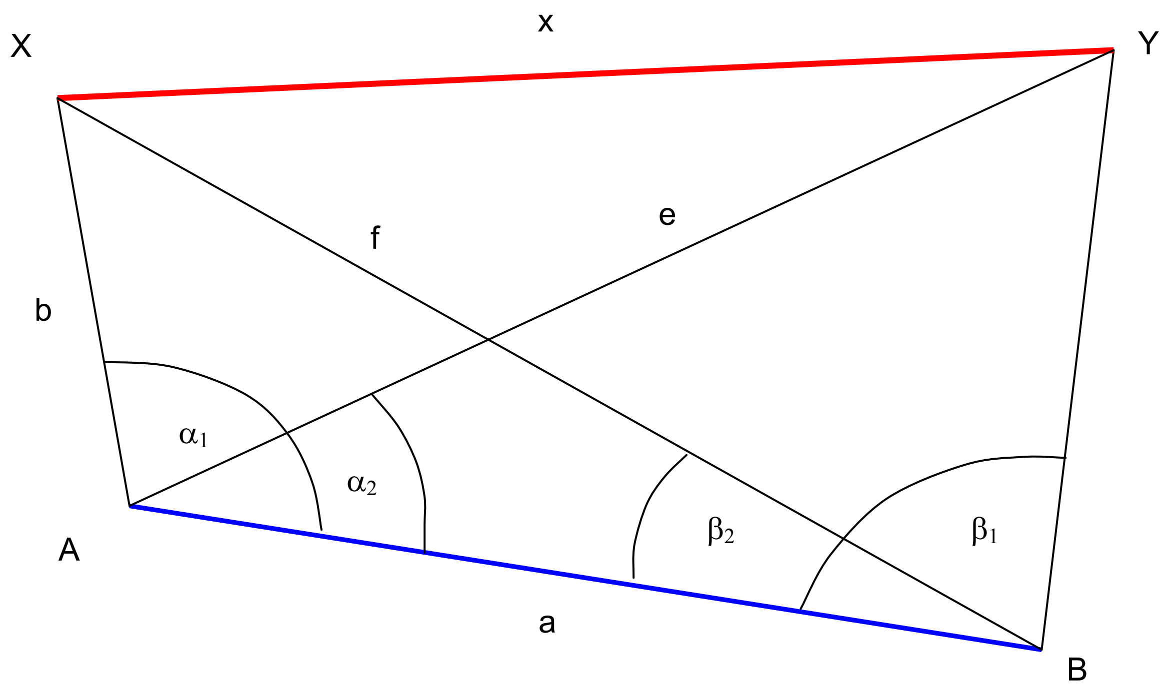
entsprechend erhält man für r:

$$r = \frac{a \sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

3. Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten

Um die Entfernung zweier unzugänglicher Punkte X und Y zu bestimmen, steckt man eine Standlinie a=AB ab und mißt die Winkel

$\alpha_1 = \angle XAB$, $\alpha_2 = \angle YAB$, $\beta_1 = \angle YBA$ und $\beta_2 = \angle XBA$.



Wir erhalten x aus dem Dreieck ΔXAY nach dem Cosinus-Satz:

$$x^2 = b^2 + e^2 - 2\, b\, e \cos(\alpha 1 - \alpha 2)$$

b ergibt sich aus dem Dreieck ΔABX nach dem Sinus-Satz:

$$\frac{b}{\sin(\beta 2)} = \frac{a}{\sin(\alpha 1 + \beta 2)}$$

$$b = \frac{a \sin(\beta 2)}{\sin(\alpha 1 + \beta 2)}$$

entsprechend erhalten wir e aus dem Dreieck ΔABY:

$$\frac{e}{\sin(\beta 1)} = \frac{a}{\sin(\alpha 2 + \beta 1)}$$

$$e = \frac{a \sin(\beta 1)}{\sin(\alpha 2 + \beta 1)}$$

Wir setzen die Terme für b und e in die erste Gleichung ein und erhalten für das Quadrat der gesuchten Länge x:

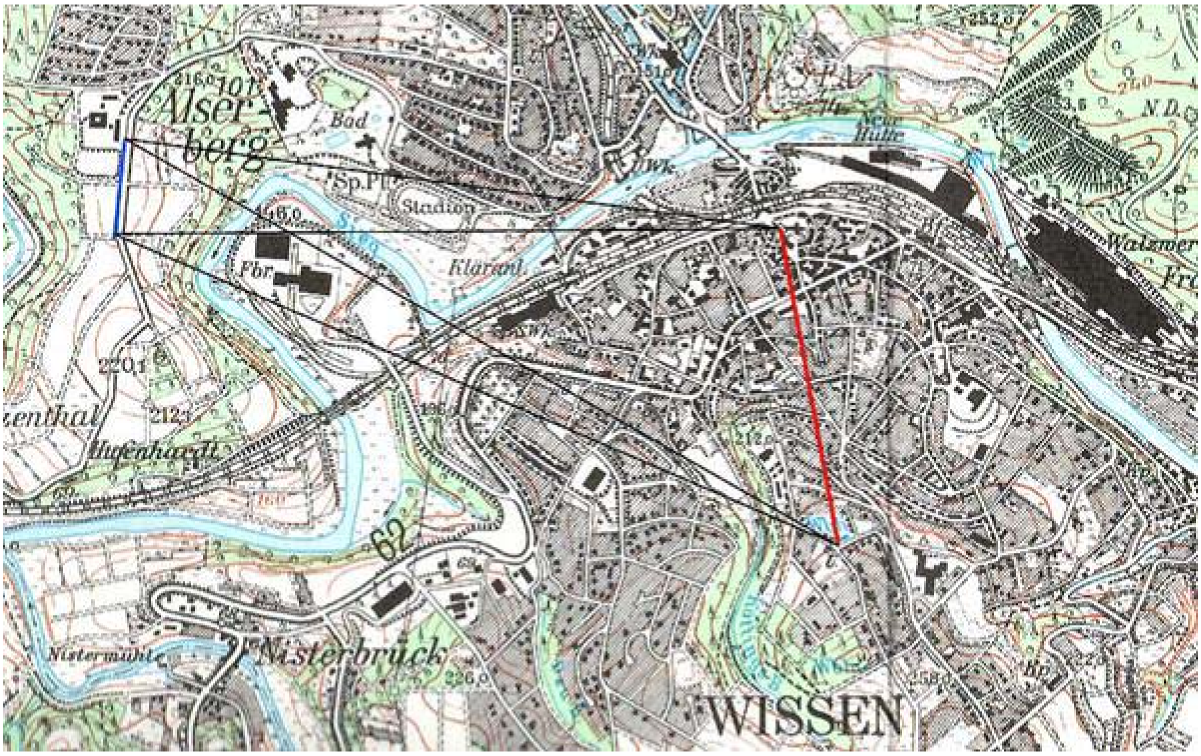
$$x^2 = a^2 \left(\left(\frac{\sin(\beta 2)}{\sin(\alpha 1 + \beta 2)} \right)^2 + \left(\frac{\sin(\beta 1)}{\sin(\alpha 2 + \beta 1)} \right)^2 - \frac{2 \sin(\beta 1) \sin(\beta 2) \cos(\alpha 1 - \alpha 2)}{\sin(\alpha 1 + \beta 2) \sin(\alpha 2 + \beta 1)} \right)$$

Praktische Durchführung:

Wir ermitteln die horizontale Entfernung x (rot) der Spitze des Kirchturms (Punkt X) und des Fernsehumsetzers auf dem Löh (Punkt Y), indem wir auf dem Pirzenthaler Kopf von den Endpunkten A und B der Standlinie a (blau) aus die Winkel α_1, α_2, β_1 und β_2 bestimmen. Aus der Formel

$$x = a\sqrt{\left(\frac{\sin(\beta 2)}{\sin(\alpha 1+\beta 2)}\right)^2+\left(\frac{\sin(\beta 1)}{\sin(\alpha 2+\beta 1)}\right)^2-\frac{2\sin(\beta 1)\sin(\beta 2)\cos(\alpha 1-\alpha 2)}{\sin(\alpha 2+\beta 1)\sin(\alpha 1+\beta 2)}}$$

berechnen wir x mit einem programmierbaren Taschenrechner (beachte: alle Winkel in Neugrad; 90° = 100 Neugrad = 100 Gon)



Wir messen: **a = 206 m**
α_1 = 98 Gon
α_2 = 69 Gon
β_1 = 124 Gon
β_2 = 94,5 Gon

wir berechnen: **x = 788 m**

Das aus unserer trigonometrischen Messung ermittelte Ergebnis weicht nur um wenige Prozent von der tatsächlichen Entfernung ab.