Gegenseitige Lage zweier Geraden zueinander

Im dreidimensionalen Raum $\mathbf{R}^3$ sind die Geraden

g : $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ und h : $\vec{x} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{v}$ mit $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

gegeben.

1. Entscheide, ob g und h parallel sind, indem man $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Unabhängigkeit untersucht:

   a) $\exists$ k$\in$**R** mit $\vec{u} = k\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ g || h

   b) $\exists$ kein k$\in$**R** mit $\vec{u} = k\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$, $\vec{v}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ g, h nicht parallel

2. Falls Fall 1.a) vorliegt, entscheide, ob g = h oder g $\neq$ h ist:

   a) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{u}$ linear abhängig $\Rightarrow$ g = h

   b) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{u}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ g $\neq$ h

3. Falls Fall 1.b) vorliegt, entscheide, ob g und h einen gemeinsamen Punkt S haben oder ob g und h windschief sind:

   a) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ linear abhängig $\Rightarrow$ $g \cap h = S$

   b) $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $g \cap h = \emptyset$ (g und h sind windschief)

4. Falls Fall 3.a) vorliegt, bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts S:

   Der Schnittpunkt S hat den Ortsvektor $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$; S ist genau dann Schnittpunkt der Geraden g und h, wenn es reelle Zahlen λ_S und μ_S gibt mit

   (1) $\vec{s} = \vec{a} + \lambda_S \cdot \vec{u}$
   (2) $\vec{s} = \vec{b} + \mu_S \cdot \vec{v}$

   (1) und (2) implizieren: $\vec{a} + \lambda_S \cdot \vec{u} = \vec{b} + \mu_S \cdot \vec{v}$

   Diese Vektorgleichung ist zu drei skalaren Gleichungen äquivalent, aus denen man die Werte λ_S oder μ_S bestimmt [sobald man einen der Werte λ_S oder μ_S hat, ist man fertig, da 3.a) in Verbindung mit 1.b) bereits verifiziert wurde]; aus der Kenntnis von λ_S oder μ_S lassen sich aus (1) oder (2) der Ortsvektor $\vec{s} = \overline{OS}$ und damit die Koordinaten des Schnittpunkts S ermitteln.