Elemente der Kombinatorik

Voraussetzung: Gegeben sei die *Grundmenge* **G = {a_1, a_2, ... , a_n}** mit **n** Elementen, **n** $\in$ **{1, 2, 3, ...}**; **k** sei eine natürliche Zahl mit **k** $\in$ **{0, 1, 2, 3, ...}**.

Beachte: Bei Tupeln mit k Komponenten („Paare“, falls k=2; „Tripel“, falls k=3; sonst „k-Tupel“) kommt es auf die Reihenfolge der Komponenten an, insbesondere gilt somit $(1;2;5) \neq (1;5;2)$; bei Mengen spielt die Reihenfolge, in der die Elemente notiert werden, definitionsgemäß keine Rolle: $\{1, 2, 5\} = \{1, 5, 2\} = \{1, 5, 5, 2\}$.

	I	**II.a**	**II.b**	**III**
Ergebnismenge Ω	Ω = Menge aller k-Tupel **m**it **W**iederholung (m. W.) mit Komponenten aus G	Ω = Menge aller k-Tupel **o**hne **W**iederholung (o. W.) mit Komponenten aus G	Spezialfall von **II.a**: Menge aller n-Tupel **o**hne **W**iederholung (o. W.) mit Komponenten aus G	Ω = Menge aller k-elementigen Teilmengen von G
Voraussetzung an **k**	$\mathbf{1 \leq k}$	$\mathbf{1 \leq k \leq n}$	$\mathbf{k = n}$	$\mathbf{0 \leq k \leq n}$
Anzahl $\mathbf{\|\Omega\|}$ der Elemente von Ω:	$\mathbf{n^k}$	$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$ $\mathbf{\frac{n!}{(n-k)!}}$	$\mathbf{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$	$\mathbf{\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$
Beispiel (**n=5**): **G={a, b, c, d, e}**	**k=3:** $\mathbf{n^k = 5^3 = 125}$	**k=3:** $\mathbf{\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60}$	**k=5:** $\mathbf{5! = 120}$	**k=3:** $\mathbf{\binom{n}{k} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10}$

Ergebnismengen für das Beispiel mit **n=5, G={a, b, c, d, e}, k=3**:

I Ω **= { (a; a; a), (b; a; a), (c; a; a), (d; a; a), (e; a; a), (a; a; b), ... , (e; e; e) }**
Für die Besetzung jeder Komponente eines Tripels gibt es 5 Möglichkeiten, und zwar unabhängig von der Belegung der anderen Komponenten.

II.a Ω **= { (a; b; c), (a; b; d), (a; b; e), (a; c; b), (a; c; d), (a; c; e), ... , (e; c; d) }**
Für die Besetzung der ersten Komponente eines Tripels gibt es 5 Möglichkeiten, der zweiten Komponente 4 Möglichkeiten und der dritten Komponente 3 Möglichkeiten, da kein Wert sich wiederholen darf.

III Ω **=**
{ {a; b; c}, {a; b; d}, {a; b; e}, {a; c; d}, {a; c; e}, {a; d; e}, {b; c; d}, {b; c; e}, {b; d; e}, {c; d; e} }
Aus einer Menge mit 5 Elementen lassen sich somit auf 10 verschiedene Arten Teilmengen mit jeweils 3 Elementen bilden.

Um einzusehen, daß es im Fall **III** $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ Möglichkeiten gibt, k-elementige Teilmengen der n-elementigen Grundmenge G zu bilden (also k Elemente aus n Elementen auszuwählen), überlegt man für **k=3, n=5** (allgemein: $\mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}$) folgendes:

Es lassen sich $\mathbf{\frac{5!}{(5-3)!} = 60}$ Tripel o. W. (allgemein: $\mathbf{\frac{n!}{(n-k)!}}$ k-Tupel o. W.) mit Komponenten aus G bilden. Da es bei Mengen im Gegensatz zu Tupeln auf die Reihenfolge, in der die Werte notiert werden, nicht ankommt, führen **3!** Tripel (allgemein: **k!** k-Tupel) auf eine bestimmte 3-elementige (allgemein: k-elementige) Menge:

$$\underbrace{(a;\ b;\ c) \quad (a;\ c;\ b) \quad (b;\ a;\ c) \quad (b;\ c;\ a) \quad (c;\ a;\ b) \quad (c;\ b;\ a)}_{\{a;\ b;\ c\}}$$

Oder man argumentiert nach Fall **II.b**: Es gibt 3! (allgemein: k!) Möglichkeiten, 3-Tupel o. W. (k-Tupel o. W.) mit Komponenten aus einer 3-elementigen (k-elementigen) Grundmenge anzuordnen.

Da jeweils k! k-Tupel o. W. auf dieselbe k-elementige Menge führen, erhält man als Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus n Elementen auszuwählen:

$$\frac{\text{Anzahl\_der\_k - Tupel\_o.W.\_aus\_n\_Elementen}}{\text{Anzahl\_der\_k - Tupel\_o.W.\_aus\_k\_Elementen}} = \frac{\frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)!}}}{\mathbf{k!}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)!\cdot k!}} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$$

Typische Anwendungen:

I Wieviele verschiedene 8-stellige Dualzahlen lassen sich bilden?

Lösung:

G={0; 1}, n=2; jede 8-stellige Dualzahl läßt sich als 8-Tupel m. W. mit Komponenten aus G beschreiben:

Ω = { (0,0,0,0,0,0,0,0), (0,0,0,0,0,0,0,1), (0,0,0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,0,1,1), (0,0,0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,0,1,0,1), (0,0,0,0,0,1,1,1), ..., (1,1,1,1,1,1,1,1 }

$|\Omega| = 2^8 = 256$

III Wieviele verschiedene Tips gibt es beim Lotto “6 aus 49”?

Lösung:

G={1; 2; 3; . . . . . ; 49} , n=49. Jeder Lottotip läßt sich als 6-elementige Teilmenge von G beschreiben, da es bekanntlich bei einem bestimmten Tip nur darauf ankommt, daß die entsprechenden Zahlen gezogen wurden, und nicht darauf, in welcher Reihenfolge die Zahlen aus der Trommel kullern.

Anzahl der 6-elementigen Teilmengen von G = $\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)!\cdot 6!} = 13983816$

II.b Wieviele Möglichkeiten gibt es, acht Türme auf einem Schachbrett so anzuordnen, daß kein Turm einen anderen schlagen kann?

Lösung:

Da ein Turm sich nur waagerecht oder senkrecht bewegen kann, ist jede der Spalten A, B, ... , H mit genau einem Turm zu besetzen.

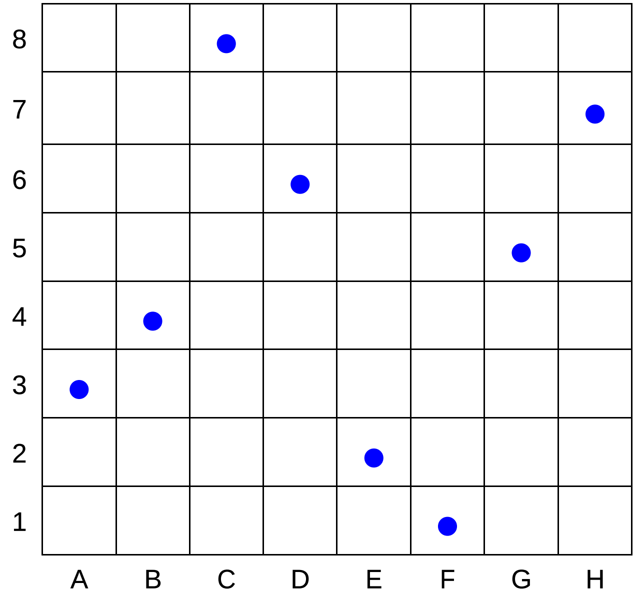
Wenn wir als Grundmenge

G = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, |G| = n = 8,

definieren (die Elemente von G stehen für eine Zeile), erhalten wir als Ergebnismenge Ω die **Menge aller 8-Tupel o. W.**, wobei die i-te Komponente eines jeden Tupels die Zeile angibt, in der der Turm der i-ten Spalte steht; die nebenstehende Anordnung der Türme wird folglich durch das 8-Tupel

(3, 4, 8, 6, 2, 1, 5, 7)

beschrieben.



Für die Besetzung der Spalte A, also die Belegung der 1. Komponente, gibt es 8 Möglichkeiten; da in jeder Zeile höchstens ein Turm positioniert werden kann, kommen, nachdem der Turm in der ersten Spalte gesetzt ist, für die Besetzung der Spalte B (2. Komponente) nur noch 7 Möglichkeiten in Frage, für die Spalte C sechs, für die Spalte D fünf, ... , für die vorletzte Spalte G zwei, und für den Turm in Spalte H bleibt nur noch ein einziger sicherer Platz.

Folglich erhält man als Anzahl der Konfigurationen, die Türme in sicherer Position voneinander zu setzen:

$$\mathbf{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320}$$