Der Logarithmus als Integralfunktion

Gegeben ist die Funktion $f(t) = 1/t$ für $t>0$. Wir untersuchen die Integralfunktion (Funktion der oberen Grenze eines Integrals) $L(x)$, die für $x>0$ wie folgt definiert ist:

$$L(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Charakteristische Eigenschaften:

Eigenschaft 1: L ist differenzierbar

Beweis: Nach dem **Hauptsatz der Integralrechnung** ist $L(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ stets differenzierbar, wenn f stetig ist, und es gilt: $L'(x) = f(x) = 1/x$. Insbesondere ist L stetig.

Eigenschaft 2: L ist streng monoton wachsend

Beweis: Nach Eigenschaft 1 ist L differenzierbar mit $L'(x) = 1/x > 0$ für alle x. Dies impliziert, daß L streng monoton wächst.

Eigenschaft 3: L(1)=0

Beweis: $L(1)=\int_1^1 f(t)\,dt=0$

Eigenschaft 4: L(ab) = L(a) + L(b) mit $a>0$ und $b>0$

Beweis: Betrachte $L(ax)$. Nach der Kettenregel gilt: $[L(ax)]' = L'(ax) \cdot a = a \cdot 1/(ax) = 1/x$, folglich ist

$$\begin{aligned}
& [L(ax)]' &&= L'(x)\\
\Leftrightarrow\quad & [L(ax)]' - L'(x) &&= 0\\
\Leftrightarrow\quad & [L(ax) - L(x)]' &&= 0\\
\Rightarrow\quad & L(ax) - L(x) &&= \text{const für alle } x>0
\end{aligned}$$

Um diese Konstante zu berechnen, wählen wir x=1 und erhalten:

$$\begin{aligned}
& L(a) - L(1) &&= \text{const}\\
\Rightarrow\quad & \text{const} &&= L(a) \quad \text{wegen Eigenschaft 3}
\end{aligned}$$

Ersetzen wir in der Gleichung $L(ax) - L(x) = L(a)$ die Variable x durch b, folgt

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

Eigenschaft 5: L(a/b) = L(a) – L(b) mit $a>0$ und $b>0$

Beweis: Ersetze in der Gleichung aus Eigenschaft 4 die Variable a durch den Quotienten a/b.

Eigenschaft 6: $L(a^n) = n \cdot L(a)$ mit $a>0$, n natürliche Zahl

Beweis (Phillip Linke): Sei x eine positive reelle Zahl (unabhängige Variable); dann gilt:

$$\begin{aligned}
& [L(x^n)]' &&= L'(x^n) \cdot n\,x^{n-1} && \text{(Kettenregel)}\\
\Rightarrow\quad & [L(x^n)]' &&= 1/x^n \cdot n\,x^{n-1} && \text{(Eigenschaft 1)}\\
\Rightarrow\quad & [L(x^n)]' &&= n/x &&\\
\Rightarrow\quad & [L(x^n)]' - n/x &&= 0 &&\\
\Rightarrow\quad & [L(x^n)]' - n\cdot L'(x) &&= 0 && \text{(Eigenschaft 1)}\\
\Rightarrow\quad & [L(x^n) - n\cdot L(x)]' &&= 0 &&
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcl} & \Rightarrow\ L(x^n) - n\cdot L(x) & = & \text{const} \\ \text{wähle } x:=1\text{, damit folgt:} & L(1^n) - n\cdot L(1) & = & \text{const} \\ & \Rightarrow\ \text{const} & = & 0 \quad \text{wegen } L(1) = 0 \\ & \Rightarrow\ L(x^n) & = & n\cdot L(x) \\ \text{ersetze } x \text{ durch } a & \Rightarrow\ L(a^n) & = & n\cdot L(a) \qquad \text{qed} \end{array}$$

Eigenschaft 6': $L(a^{-m}) = -m \cdot L(a)$ mit $a>0$, m natürliche Zahl

Hinweis zum Beweis: Verifiziere zunächst **$L(a^m) + L(a^{-m}) = 0$**

Eigenschaft 6'': $L(a^x) = x \cdot L(a)$ mit $a>0$, x ist rational

Hinweis zum Beweis: Schreibe $x=p/q$ mit natürlichen Zahlen p und q, $q\neq 0$; verwende bereits bewiesene Eigenschaften.

Eigenschaft 6''': $L(a^x) = x \cdot L(a)$ mit $a>0$, x ist reell

Beweisidee: Jede reelle Zahl läßt sich als Grenzwert einer Folge aus rationalen Zahlen schreiben.

Eigenschaft 7: $L(e) = 1$

Die Eulersche Zahl e ist definiert als Grenzwert:

$$e := \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = 2{,}7182818.....$$

Bemerkung: e ist nicht nur irrational, sondern auch transzendent, d. h., es gibt keine algebraische Gleichung n-ten Grades der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = 0\,,$$

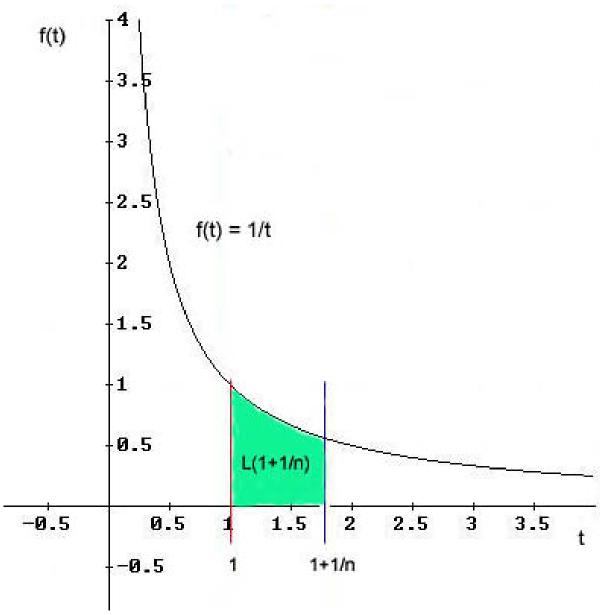
die die Zahl e als Lösung hat. Dagegen sind die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $1-\sqrt{3}$ nicht transzendent, da sie Lösung der Gleichung

$x^2 = 2$ *bzw.* $x^2 - 2x - 2 = 0$ *sind.*

Beweis der Eigenschaft 7:

$$L(e) = L[\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n] = \lim_{n\to\infty} L[(1+1/n)^n]$$ wegen der Stetigkeit von L (Eigenschaft 1).

$$= \lim_{n\to\infty} \left(n\cdot L(1+1/n)\right)$$ wegen Eigenschaft 6



Den Term $L(1+1/n)$ können wir nach gemäß der Zeichnung nach unten und nach oben wie folgt abschätzen:

$$\frac{1}{n+1} < L(1+1/n) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{n}{n+1} < n \cdot L(1+1/n) < 1$$

mit dem Grenzübergang für $n \to \infty$ folgt:

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \le \lim_{n\to\infty} [n \cdot L(1+1/n)] \le 1$$

$$\Rightarrow \qquad 1 \le \lim_{n\to\infty} [n \cdot L(1+1/n)] \le 1$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} [n \cdot L(1+1/n)] = 1 \qquad \text{qed}$$

Aus den Eigenschaften 6''' und 7 ergibt sich: $L(e^x) = x \cdot L(e) = x$; folglich ist L(x) die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion

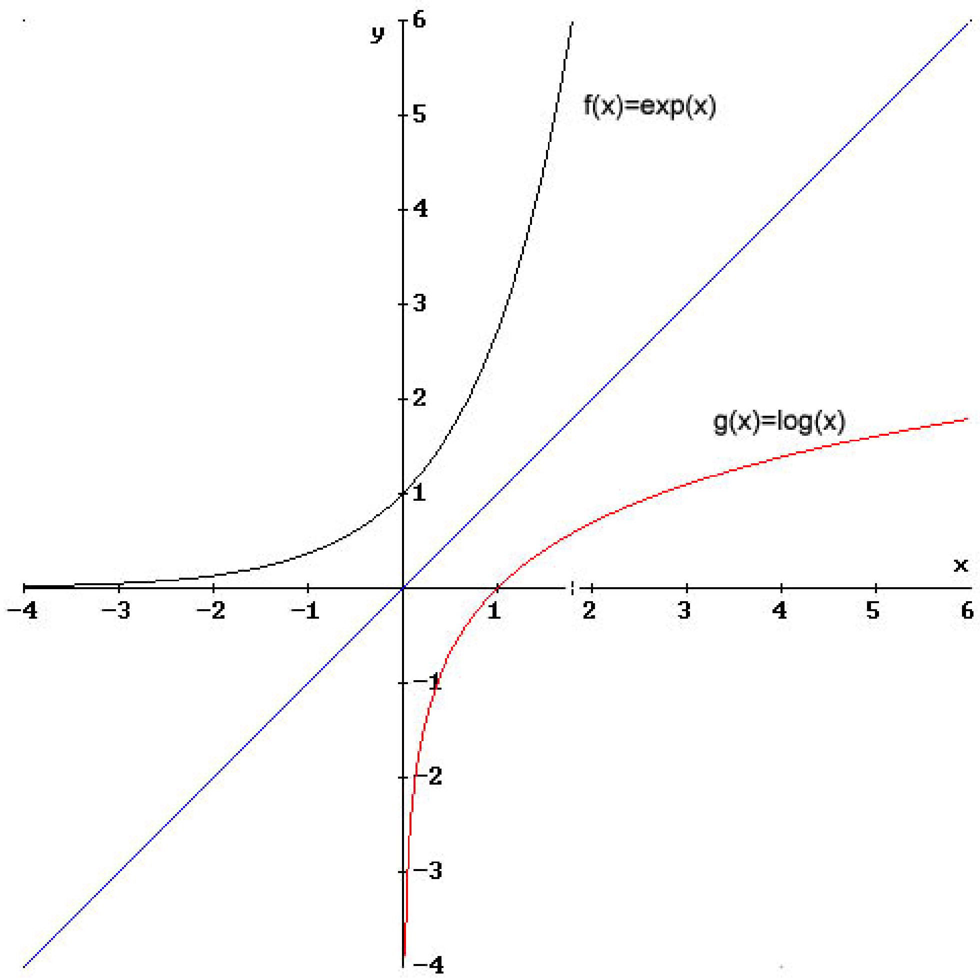
$$\mathbf{f(x) = e^x}$$

und L(x) der Logarithmus von x zur Basis e:

$$\mathbf{L(x) = \log_e x = \ln x} \quad (\textbf{l}\text{ogarithmus }\textbf{n}\text{aturalis})$$

Insbesondere ist F(x) = ln x + C Stammfunktion zu f(x) = 1/x .

Die Graphen der Exponentialfunktion $\mathbf{f(x) = e^x = exp(x)}$
und der Logarithmus-Funktion $\mathbf{g(x) = f^{-1}(x) = ln\ x = log(x)}$:



Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\mathbf{f(x) = e^x}$ ergibt sich als Umkehrfunktion einer Integralfunktion $\mathbf{g(x) = L(x)}$, die folglich die Logarithmusfunktion zur Basis **e** ist:

$$\mathbf{f:}\ \begin{array}{ccc} \Re & \to & \Re^+ \\ x & \to & e^x \end{array} \qquad\qquad \mathbf{g:}\ \begin{array}{ccc} \Re^+ & \to & \Re \\ x & \to & \ln x \end{array}$$

Bemerkungen: a) Die Umkehrfunktion zu einer Funktion f wird auch mit f^{-1} bezeichnet.
b) Sind f und g Umkehrfunktionen voneinander, gilt stets:

$$\mathbf{f\,[g(x)] \;=\; g\,[f(x)] \;= x} \quad \text{oder} \quad \mathbf{f\,[f^{-1}(x)] \;=\; f^{-1}[f(x)] \;= x}$$

c) Schreibweise: $\mathbf{f\,[g(x)] \;= f \circ g\,(x)}$ (lies: „f nach g von x“)

Folgender Satz erlaubt, die Ermittlung der Ableitung einer Umkehrfunktion f^{-1} auf die Berechnung der Ableitung der Funktion f’ zurückzuführen:

Satz: Gegeben sind die bijektive differenzierbare Funktion f(x) und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$. Falls $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$, ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ von f(x) ebenfalls differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} \quad .$$

Beweis:

$$\begin{array}{rrcll} & \mathbf{f \circ f^{-1}(x)} & \mathbf{=} & \mathbf{x} & \\ \Rightarrow & \mathbf{[\,f \circ f^{-1}\,]'(x)} & \mathbf{=} & \mathbf{1} & \\ \Rightarrow & \mathbf{f'\,[f^{-1}(x)] \cdot (f^{-1})'(x)} & \mathbf{=} & \mathbf{1} & \text{(Kettenregel)} \\ \Rightarrow & \mathbf{(f^{-1})'(x)} & \mathbf{=} & \mathbf{1\,/\,f'\,[f^{-1}(x)]} & \text{qed} \end{array}$$

Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich die Ableitung der Exponentialfunktion $g(x) = e^x$ ermitteln:

Für $f(x) = \ln x$ ist $f^{-1}(x) = e^x$; daher folgt wegen $f'(x) = 1/x$:

$$(e^x)'=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}=\frac{1}{f'[e^x]}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$$

Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ hat also die bemerkenswerte Eigenschaft, daß sie gleich ihrer Ableitung ist!

Jede Exponentialfunktion $y = a^x$ mit a reell, a>0, läßt sich als Exponentialfunktion mit der Grundzahl e schreiben, genauer: es gibt eine reelle Zahl k, k reell, so daß gilt:

$$\mathbf{a^x = e^{k \cdot x}}$$

Beweis: $$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a} = e^{kx} \quad \text{mit} \quad k = \ln a$$

Daher genügt es, wenn der Taschenrechner lediglich die Exponential- und Logarithmus-Funktionen zur Basis e oder zur Basis 10 bereitstellt.