Lösung zu Aufgabe 16, Seite 156, Analytische Geometrie

20.09.2007

Vorbemerkung zu Derive:

Die Ebene E und die Kugel k, welche die Ebene E, die x_1–x_3–Ebene und die x_1–x_2–Ebene berührt, wurden mit Derive6 dargestellt; hier werden die Variablen x_1, x_2, x_3 mit x, y, z bezeichnet.
Um E und k zeichnen zu können, sind die implizit gegebenen Gleichungen für E und k jeweils nach z aufzulösen; der jeweils von x und y abhängige Funktionsterm wird ins Algebra-Fenster von Derive eingegeben und geplottet.

Gleichungen (vgl. Seite 2):

E : $5y + 12z - 12 = 0$

$\Leftrightarrow \quad z = 1 - 5y/12$

k : $(x - 0,5)^2 + (y - 0,4)^2 + (z - 0,4)^2 = 0,4^2$

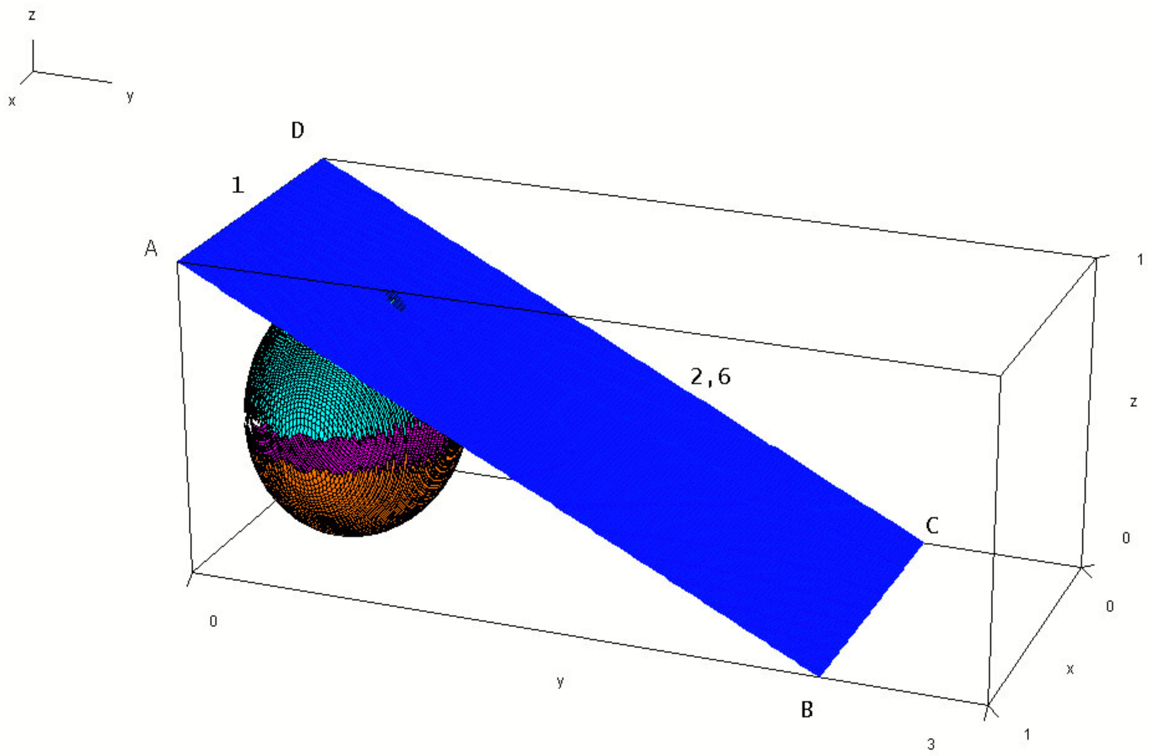
$\Leftrightarrow \quad z = 0,4 + \sqrt{[0,16 - (x-0,5)^2 - (y-0,4)^2]} \quad \vee \quad z = 0,4 - \sqrt{[0,16 - (x-0,5)^2 - (y-0,4)^2]}$

Datei: Algebra 1 Datum: 20.09.2007 Zeit: 22:36:37

#1: $1 - \frac{5}{12}\cdot y$

#2: $\sqrt{(0.16 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.4)^2)} + 0.4$

#3: $-\sqrt{(0.16 - (x - 0.5)^2 - (y - 0.4)^2)} + 0.4$



Gegeben: D(0|0|1) A(1|0|1) C(0|c_2|0) mit $c_2^2 + 1^2 = 2{,}6^2 \Leftrightarrow c_2 = 2{,}4$

Die Ebene E wird durch die Spannvektoren

$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie den Aufvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben; der Vektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zu $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{DA}$ und ist folglich ein Normalenvektor der Ebene.

Wegen $|\vec{n}| = 13$ erhalten wir als Hessesche Normalform von E:

$$E: \quad \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E: \quad \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}\vec{x} - \frac{12}{13} = 0$$

oder in Koordinatenform: $E: \quad 5x_2 + 12\,x_3 - 12 = 0$

Der Mittelpunkt M der Kugel liegt auf einer Geraden im Abstand jeweils r zur x_1–x_3–Ebene und zur x_1–x_2–Ebene, hat also die Koordinaten (λ|r|r), λ beliebig; o.B.d.A. sei $\lambda=0$.

Damit die Kugel k mit Radius r die Ebene E berührt, ist notwendig und hinreichend, daß M(0|r|r) von E den Abstand r hat, r>0.

Abstandsgröße für M:

$$e = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \end{pmatrix} - \frac{12}{13} = \frac{17r - 12}{13}$$

Das Vorzeichen von e entscheidet über die Lage von M:
M und O liegen in demselben Halbraum bzgl. der Ebene genau dann, wenn e<0 ist (diese Lage ist hier gemeint, denn der Ball soll noch unter das durch E gegebene Brett passen); falls e>0 ist, liegen O und M in verschiedenen durch E getrennten Halbräumen, und die Kugel berührt die Koordinatenebenen und die Ebene E „von außen".

Zu lösen ist somit die Gleichung

$$d(M;E) = |e| = r \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{17r-12}{13}\right| = r$$

1. Fall: **e<0**

Falls e<0 ist, folgt: $\left|\frac{17r-12}{13}\right| = \frac{12-17r}{13} = r \quad \Leftrightarrow \quad 30 \cdot r = 12 \quad \Leftrightarrow$ **r = 0,4**

2. Fall: **e>0**

Falls e>0 ist, folgt: $\left|\frac{17r-12}{13}\right| = \frac{17r-12}{13} = r \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot r = 12 \quad \Leftrightarrow$ **r = 3**

Der Durchmesser 2r darf höchstens 80 cm betragen, damit der Ball noch unter das Brett ABCD paßt.

Zweite, in der Aufgabenstellung nicht verlangte Lösung [Kugel k mit Mittelpunkt M(λ|3|3), hier λ=3, und Radius r = 3]; Vereinbarung: $x:=x_1$, $y:=x_2$, $z:=x_3$

Die Kugel

k : $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 9$

berührt die Ebene

E : $5y + 12z - 12 = 0$

sowie die Koordinatenebenen

y = 0 und **z = 0**.

Datei: mathe1.dfw   Datum: 27.09.2007   Zeit: 22:33:24

#1: $1 - \frac{5}{12}\cdot y$

#2: $\sqrt{(9 - (x - 3)^2 - (y - 3)^2)} + 3$

#3: $-\sqrt{(9 - (x - 3)^2 - (y - 3)^2)} + 3$

#4: $y = 0$

#5: $z = 0$