LK M12 12.11.2010

Eine Problemstellung aus der Luftfahrt

Vorbemerkung: Um eine Bewegung im dreidimensionalen Raum zu beschreiben, bedarf es jeweils dreier zeitabhängiger Komponenten für den Weg, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung; diese Größen lassen sich daher als Vektoren im Raum auffassen. Wir nehmen für das folgende an, daß ein kartesisches Bezugssystem zugrundegelegt wird. Dabei liegen die x- und y-Achse in einer zur lokal als eben anzusehenden Erdoberfläche parallelen Ebene, die z-Achse verläuft senkrecht zur x-Achse und zur y-Achse. Von der Erdkrümmung werde abgesehen; wir betrachten die Bahnen zweier Flugzeuge, die sich gleichförmig-geradlinig bewegen (d. h., die Geschwindigkeit beider Objekte ist nach Betrag und Richtung konstant).
Bekanntlich sind bei einer gleichförmig-geradlinigen Bewegung der Weg s, die Geschwindigkeit v und die Zeit t über folgende Gleichung miteinander verknüpft:

$$\mathbf{s = v \cdot t}$$

Entsprechend erhält man im dreidimensionalen Raum für die Komponenten x(t), y(t) und z(t) des Ortes eines sich gleichförmig-geradlinig bewegenden Objekts die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

mit den Ortskoordinaten x_0, y_0 und z_0 zum Zeitpunkt t = 0 und den (konstanten) Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z.

Die Bahn eines sich gleichförmig-geradlinig bewegenden Flugzeugs läßt sich daher lokal durch eine Geradengleichung in Parameterform beschreiben, falls man die Zeit t als Parameter auffaßt. Beachte: Da der Richtungsvektor die Geschwindigkeit angibt, kann dessen Länge nicht beliebig gewählt werden, da der Betrag der Geschwindigkeit hier eingeht.

Für die folgende Aufgabe sei der Maßstab vereinbart:
Entfernungen: 1 $\leftrightarrow$ 100 m Geschwindigkeiten: 1 $\leftrightarrow$ 100 m/s Zeit: 1 $\leftrightarrow$ 1 s

Aufgabe:

Die Bahnkurve zweier Flugzeuge werde beschrieben durch die Gleichungen

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \\ -2 \\ -0.1 \end{pmatrix} \; 4$$

Die erste Maschine befindet sich offenbar im Steigflug, die zweite im Sinkflug. In der Zeichnung sind die Positionen der Maschine g (blau) und h (rot) zum Zeitpunkt der größten Annäherung eingezeichnet. Zum Zeitpunkt t = 0 sei es genau 8.00 Uhr.

a) Ermittle jeweils den Betrag der Geschwindigkeit, mit der die Maschinen g und h fliegen.

b) Beweise, daß die Geraden g und h windschief sind.

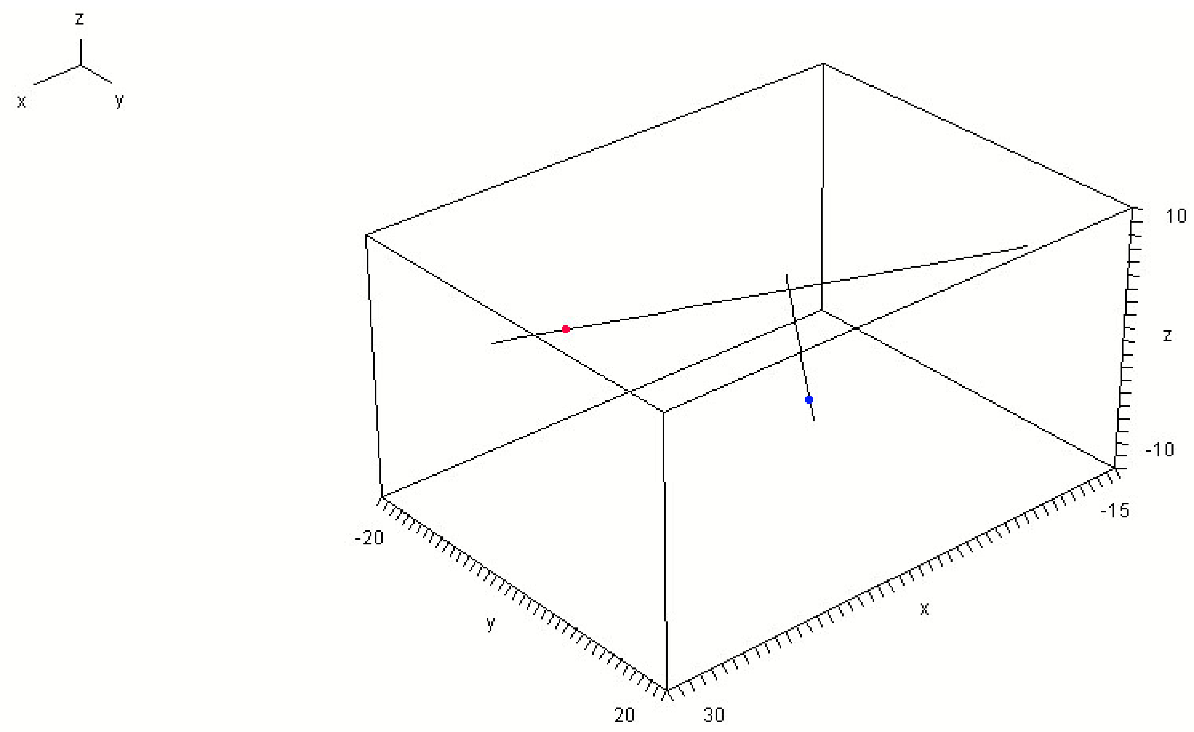
c) Bestimme den Abstand a der Geraden g und h voneinander (Hinweis: dieser Abstand a ergibt sich als Abstand eines Punktes der ersten Geraden zu derjenigen Ebene E, welche die zweite Gerade enthält und parallel zur ersten verläuft.).

d) Der Abstand a der windschiefen Geraden g und h ist in der Regel nicht gleich der minimalen Entfernung d_{min}, auf die sich die Flugzeuge während ihres Fluges nähern; vielmehr stellt a eine untere Schranke für d_{min} dar, es gilt also: $a \leq d_{min}$.
Bestimme d_{min} mit den Methoden der Differentialrechung!
(Hinweis: Bilde einen zeitabhängigen Funktionsterm d(t) für der Abstand der Positionen zum Zeitpunkt t beider Objekte im Raum und ermittle denjenigen Zeitpunkt t_0, für den d(t) ein Minimum annimmt.)
Um wieviel Uhr erfolgt die größte Annäherung?

e) Bestimme die Ortskoordinaten der Maschinen zum Zeitpunkt t_0 der größten Annäherung.

f) Von einer sicherheitstechnisch sensiblen Einrichtung im Punkt R(25|-5|3) ist ein Mindestabstand von 2 km einzuhalten. Überprüfe, ob die Bahnen der Flugzeuge dieser Vorgabe genügen.
(Hinweis: diese Teilaufgabe führt auf das Problem, den Abstand eines Punktes von einer Geraden zu ermitteln.)

g) Bestimme den Steigwinkel φ (Winkel gemessen gegen die horizontale Ebene) der Maschine g.



Anhang:
Lösung mit Derive (ohne eingefügte Kommentare, da nur zur Kontrolle der eigenen Rechnungen).

#1: $[5, 3, 1] + t\cdot[2, 3, 0.5]$

#2: $[4, -2, 3] + t\cdot[4, -2, -0.1]$

#3: $[7, 22, -160]\cdot[2, 3, 0.5]$

#4: 0

#5: $[7, 22, -160]\cdot[4, -2, -0.1]$

#6: 0

#7: $\left|[7, 22, -160]\right|$

#8: $\sqrt{26133}$

#9: 161.6570443

#10: $$\frac{[x, y, z]\cdot[-7, -22, 160]}{\sqrt{26133}} - \frac{[5, 3, 1]\cdot[-7, -22, 160]}{\sqrt{26133}} = 0$$

#11: $$\frac{[x, y, z]\cdot[-7, -22, 160]}{\sqrt{26133}} - \frac{59\cdot\sqrt{26133}}{26133} = 0$$

#12: $$\frac{[x, y, z]\cdot[-7, -22, 160]}{\sqrt{26133}} - 0.3649701763 = 0$$

#13: $$\frac{[4, -2, 3]\cdot[-7, -22, 160]}{\sqrt{26133}} - \frac{59\cdot\sqrt{26133}}{26133}$$

#14: $$\frac{496}{\sqrt{26133}} - \frac{59\cdot\sqrt{26133}}{26133}$$

#15: $$\frac{437\cdot\sqrt{26133}}{26133}$$

#16: 2.703253679

#17: $\left|[5, 3, 1] + t\cdot[2, 3, 0.5] - [4, -2, 3] - t\cdot[4, -2, -0.1]\right|$

#18: $$\left|\left[1 - 2\cdot t,\ 5\cdot t + 5,\ \frac{3\cdot t}{5} - 2\right]\right|$$

#19: $$\left|\left[1 - 2\cdot t,\ 5\cdot t + 5,\ \frac{3\cdot t}{5} - 2\right]\right|^2$$

#20: $$\frac{2\cdot(367\cdot t^2 + 545\cdot t + 375)}{25}$$

#21: $\frac{d}{dt} \frac{2\cdot(367\cdot t^2 + 545\cdot t + 375)}{25}$

#22: $\frac{2\cdot(734\cdot t + 545)}{25}$

#23: $\text{SOLVE}\left(\frac{2\cdot(734\cdot t + 545)}{25}, t\right)$

#24: $t = -\frac{545}{734}$

#25: $t = -0.7425068119$

#26: $t :\!= -0.7425068119$

#27: $\left\| \left[1 - 2\cdot t, 5\cdot t + 5, \frac{3\cdot t}{5} - 2\right] \right\|$

#28: 3.716631741

#29: $t :\!=$

#30: $t :\!= 3.716631741$