Über die Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung

Mechanische Schwingungen:

Die Funktion $t \to s(t)$, die jedem Zeitpunkt t die Elongation s(t) zuordnet, gehorcht der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$s''(t) = -\frac{D}{m} \cdot s(t) \ .$$

Als Rückstellkonstante D erhält man im Falle

des Feder-Schwere-Pendels die Federkonstante,
des mathematischen Pendels: $D = m \cdot g/l$,
der schwingenden U-Säule: D=…….

Die Existenz einer Lösung ergibt sich aus dem Ansatz

$s(t) = s_0 \cdot \sin\omega t$ mit $\omega = \sqrt{(D/m)}$ und s_0=Amplitude;

die Eindeutigkeit der Lösung wird erzwungen, indem man die Elongation und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t=0 durch die Anfangsbedingungen

$s(0) = s_0$
$s'(0) = v(0) = v_0$

vorgibt.

Wir beweisen folgenden

Satz:

Gegeben sei das Gleichungssystem (1), (2), (3)

(1) $f''(t) = -k \cdot f(t)$; $k = -D/m$
(2) $f'(0) = a$
(3) $f(0) = 0$

Dann ist die Lösung f(t), die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, eindeutig bestimmt.

Beweisschritte:

Nimm an, es gebe zwei Lösungen f(t) und g(t) von (1), (2), (3); d. h. also, es gilt:

$f'' = -k \cdot f;\ \ k = -D/m$
$f'(0) = a$
$f(0) = 0$

sowie

$g''= -k \cdot g;\ \ k =-D/m$
$g'(0) = a$
$g(0) = 0$

1.Schritt

Beweise, daß für jede Lösung f von (1), (2), (3) gilt:
$(k \cdot f^2 + f'^2) = a^2$

2.Schritt

Beweise, daß für den Fall, daß f, g Lösungen von (1), (2), (3) sind, folgt:
I $\quad k \cdot f \cdot g + g' \cdot f' = a^2$
II $\quad f \cdot g' - f' \cdot g = 0$

3.Schritt

Multipliziere die Gleichung I mit f, die Gleichung II mit f'. Subtrahiere dann $2 \cdot \mathrm{II} \cdot f'$ von $2 \cdot \mathrm{I} \cdot f$ und zeige so, daß gilt:

$g \cdot (k \cdot f^2 + f'^2) = a^2 \cdot f.$

4. Schritt:

mit dem 1. Schritt folgt die Behauptung.