Beweisverfahren

Im Folgenden stehen **A** und **B** für Aussagen. Eine Aussage hat den Booleschen Wert **`True`** oder **`False`**. Mit $\neg$**A** bezeichnen wir die Verneinung der Aussage **A.**

Die Boolesche **`or`**-Verknüpfung wird auch mit dem Symbol $\vee$, die Boolesche **`and`**-Verknüpfung mit dem Symbol $\wedge$ bezeichnet.

Wenn aus „**A** == **`True`**" folgt: „**B** == **`True`**", schreiben wir:
A $\Rightarrow$ **B** (lies: *„aus A folgt B"* oder *„A impliziert B"*)

Die Implikation **A** $\Rightarrow$ **B** ist ebenfalls eine Aussage, die den Wert **`True`** oder **`False`** annehmen kann.

Die Implikation **B** $\Rightarrow$ **A** heißt die Umkehrung der Implikation **A** $\Rightarrow$ **B** .

Falls die Implikationen **A** $\Rightarrow$ **B** und **B** $\Rightarrow$ **A** jeweils den Wert **`True`** haben, heißen die Aussagen **A** und **B** äquivalent: **A** $\Leftrightarrow$ **B** (lies: *„A äquivalent zu B"*)

kurz: $\quad (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B} \;\wedge\; \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B})$

Merke: $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A})$

Beispiel 1

A = „Die Qualifikation im Prüfungsbereich ist erreicht"
B = „Im Prüfungsbereich wurden mindestens 100 Punkte erzielt"

$\neg$**A** = „Die Qualifikation im Prüfungsbereich ist nicht erreicht"
$\neg$**B** = „Im Prüfungsbereich wurden weniger als 100 Punkte erzielt"

Die Implikation **A** $\Rightarrow$ **B** hat den Wahrheitswert **`True`**:

> Wenn die Qualifikation im Prüfungsbereich erreicht ist, wurden im Prüfungsbereich mindestens 100 Punkte erzielt.

Ebenso hat die zu **A** $\Rightarrow$ **B** äquivalente Implikation $\neg$**B** $\Rightarrow$ $\neg$**A** den Wahrheitswert **`True`**:

> Wenn im Prüfungsbereich weniger als 100 Punkte erzielt wurden, ist die Qualifikation im Prüfungsbereich nicht erreicht.

Dagegen hat die Umkehrung **B** $\Rightarrow$ **A** den Wahrheitswert **`False`**:
Die Implikation

> Wenn im Prüfungsbereich mindestens 100 Punkte erzielt wurden, ist die Qualifikation im Prüfungsbereich erreicht.

ist falsch!

1. Direkter Beweis

Der direkte Beweis verifiziert die Implikation **A** $\Rightarrow$ **B** .

Beispiel 2 (Satz des Pythagoras):

A = „Das Dreieck ΔABC hat einen rechten Winkel"
B = „Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten"
oder:

Gegeben: ΔABC
A = „$\gamma = \angle ACB = 90^{\circ}$"
B = „$a^2 + b^2 = c^2$"

Dann gilt der Satz des Pythagoras:

Die Implikationen **A** $\Rightarrow$ **B** und **B** $\Rightarrow$ **A** sind jeweils wahr, die Aussagen **A** und **B** sind somit äquivalent: **A** $\Leftrightarrow$ **B**

In Worten:

SATZ: Ein Dreieck ΔABC hat einen rechten Winkel genau dann, wenn die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse ist.

Beispiel 3

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion f.
A = „Die Funktion f nimmt an der Stelle $x=x_E$ ein lokales Extremum an"
B = „$f'(x_E) = 0$"

Dann gilt: Die Implikation **A** $\Rightarrow$ **B** ist wahr.

In Worten:

SATZ: Wenn die Funktion f an der Stelle $x=x_E$ ein lokales Extremum annimmt, folgt: $f'(x_E) = 0$.

Äquivalente Formulierung:
Wegen **(A** $\Rightarrow$ **B)** $\Leftrightarrow$ **(** $\neg$**B** $\Rightarrow$ $\neg$**A)** läßt sich vorstehender Satz auch wie folgt formulieren:

SATZ: Wenn $f'(x_E) \neq 0$, folgt:
Die Funktion f nimmt an der Stelle $x=x_E$ kein Extremum an.

Die Bedingung $f'(x_E) = 0$ ist für die Existenz eines lokalen Extremums an der Stelle $x=x_E$ zwar notwendig, aber keineswegs hinreichend, wie folgendes Beispiel zeigt:

Die Ableitung der differenzierbare Funktion $f(x) = x^3$ verschwindet an der Stelle $x=0$, aber f nimmt an der Stelle $x=0$ ein Extremum nicht an (vielmehr hat der Graph von f an der Stelle $x=0$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente).

Die Umkehrung **B** $\Rightarrow$ **A** ist – wegen vorstehenden Gegenbeispiels – somit falsch!

2. Indirekter Beweis

Anstatt die Implikation **A** $\Rightarrow$ **B** zu verifizieren, verifiziert man die äquivalente Implikation $\neg$**B** $\Rightarrow$ $\neg$**A** .

Beispiel 4

Definition: Eine Zahl x heißt rational, wenn sie sich als Bruch darstellen läßt, andernfalls heißt x irrational.

SATZ: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Präzisere Formulierung vorstehender Behauptung:

SATZ: Wenn das Quadrat einer Zahl x den Wert 2 hat, folgt: x ist irrational.

A = „x ist eine Zahl mit $x^2 = 2$"
B = „x ist irrational"
$\neg$**A** = „x ist eine Zahl mit $x^2 \neq 2$"
$\neg$**B** = „x ist rational"

Anstatt **A** $\Rightarrow$ **B** zu verifizieren, verifizieren wir die äquivalente Implikation
$\neg$**B** $\Rightarrow$ $\neg$**A** :

SATZ: Wenn x rational ist, folgt: x^2 kann den Wert 2 nicht annehmen.

Beweis:

Annahme: x ist rational, und x^2 hat den Wert 2.

x rational $\Rightarrow$ Es gibt ganze Zahlen p und q, $q \neq 0$, mit $x = p/q$;
oBdA setzen wir voraus, daß p und q teilerfremd sind, daß der Bruch p/q also gekürzt ist.

$\Rightarrow$ $x^2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $2 = p^2/q^2$

$\Rightarrow$ $2\ q^2 = p^2$

$\Rightarrow$ p^2 ist gerade

$\Rightarrow$ p ist gerade

$\Rightarrow$ Es gibt eine ganze Zahl k mit $p = 2k$

$\Rightarrow$ $2\ q^2 = (2k)^2$

$\Rightarrow$ $2\ q^2 = 4\ k^2$

$\Rightarrow$ $q^2 = 2\ k^2$

$\Rightarrow$ q^2 ist gerade

$\Rightarrow$ q ist gerade

$\Rightarrow$ Es gibt eine ganze Zahl m mit $q = 2m$

$\Rightarrow$ p und q sind gerade, haben jeweils den Teiler 2; p und q sind also entgegen der Voraussetzung nicht teilerfremd.

Damit haben wir einen Widerspruch zu der Annahme konstruiert, daß x ein gekürzter Bruch ist und daß das Quadrat von x den Wert 2 hat; somit gibt es keine rationale Zahl, deren Quadrat den Wert 2 hat.

3. Das Beweisverfahren „Vollständige Induktion“

to be continued