

Halbaddierer und Volladdierer

Die Ziffern einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl a ergeben sich als Aneinanderreihung der Koeffizienten aus der Dezimalzerlegung (Summe von Zehnerpotenzen) von a ; entsprechend erhalten wir die Darstellung von a im Dualsystem als Aneinanderreihung der Koeffizienten aus der Dualzerlegung (Summe von Zweierpotenzen).

$$87_{\text{dezimal}} = 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$87_{\text{dezimal}} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1010111_{\text{dual}}$$

Addition der Dualzahlen

$$a = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 \quad \text{und} \quad b = b_3 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 :$$

	a_3	a_2	a_1	a_0		1	1	0	1
+	b_3	b_2	b_1	b_0		1	1	0	0
s ₄	s ₃	s ₂	s ₁	s ₀		0	0	0	0

Den Übertrag („carry“), der sich aus der i -ten Stelle ergibt und der bei der Addition in der $(i+1)$ -ten Stelle zu berücksichtigen ist, bezeichnen wir mit c_{i+1} ; $i \geq 0$.

Für die 0-te Stelle genügt ein Halbaddierer mit den Eingängen a_0 und b_0 und den Ergebnissen s_0 und c_1 ; die Addition in der i -ten Stelle, $i \geq 1$, erfordert einen Volladdierer mit den Eingängen a_i , b_i , c_i und den Ergebnissen s_i und c_{i+1} .

Halbaddierer HA

Wahrheitstafel:

a_0	b_0	s_0	c_1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Wir ermitteln für s_0 und c_1 jeweils die disjunktive Normalform („Disjunktion der Konjunktionen“):

$$s_0 = \overline{a_0} \cdot b_0 + a_0 \cdot \overline{b_0} = a_0 \oplus b_0$$

$$c_1 = a_0 \cdot b_0$$

Volladdierer VA

Wahrheitstafel:

a_i	b_i	c_i	s_i	c_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Wir ermitteln für s_i und c_{i+1} jeweils die disjunktive Normalform („Disjunktion der Konjunktionen“) und vereinfachen ggf. die booleschen Funktionsterme:

$$s_i = \bar{a}_i \cdot \bar{b}_i \cdot c_i + \bar{a}_i \cdot b_i \cdot \bar{c}_i + a_i \cdot \bar{b}_i \cdot \bar{c}_i + a_i \cdot b_i \cdot c_i$$

ohne Index i geschrieben:

$$s = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$s = (\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (0 + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + 0) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (\bar{a} \cdot a + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + b \cdot \bar{b}) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [(\bar{a} + b) \cdot (a + \bar{b})] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{\bar{a}} + \bar{b})] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot (\bar{\bar{a}} \cdot b)] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [\overline{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b}] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (\overline{a \oplus b}) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \oplus c$$

mit Index i erhält man:

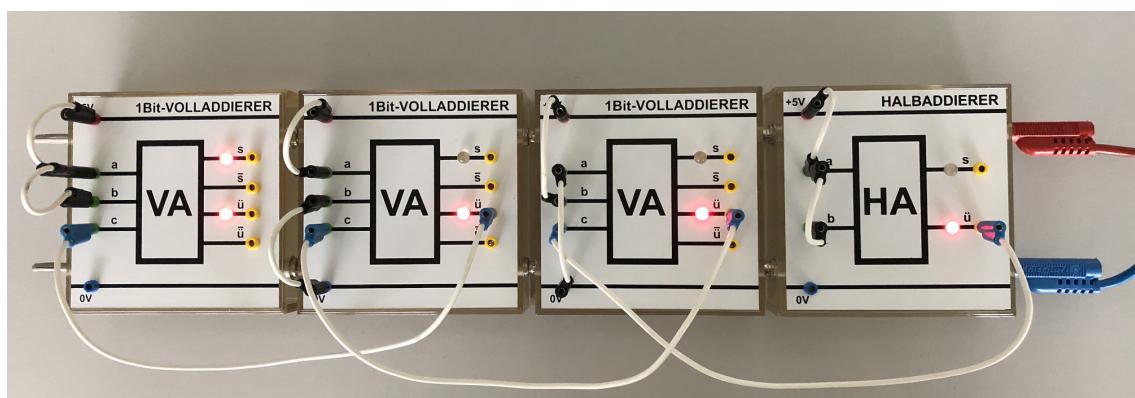
$$s_i = (a_i \oplus b_i) \oplus c_i$$

$$c_{i+1} = \bar{a}_i \cdot b_i \cdot c_i + a_i \cdot \bar{b}_i \cdot c_i + a_i \cdot b_i \cdot \bar{c}_i + a_i \cdot b_i \cdot c_i$$

$$c_{i+1} = (\bar{a}_i \cdot b_i + a_i \cdot \bar{b}_i) \cdot c_i + a_i \cdot b_i \cdot (\bar{c}_i + c_i)$$

$$c_{i+1} = (\bar{a}_i \cdot b_i + a_i \cdot \bar{b}_i) \cdot c_i + a_i \cdot b_i \cdot 1$$

$$c_{i+1} = (a_i \oplus b_i) \cdot c_i + a_i \cdot b_i$$



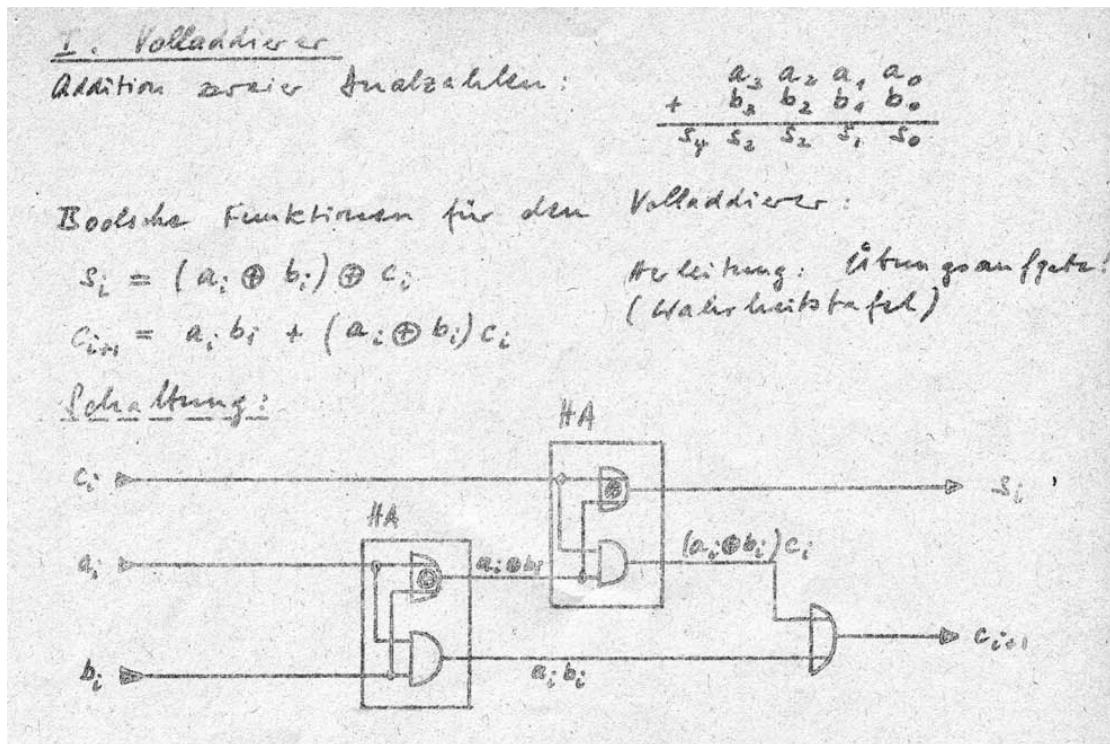
4-Bit-Paralleladdierer mit seriellem Übertrag

Merke:

Bei der Addition zweier Dualzahlen benötigt man für das LSB (least significant bit) einen Halbaddierer (Eingänge: a_0, b_0 ; Ausgänge: s_0, c_1), für die höherwertigen Bits jeweils einen Volladdierer (Eingänge: a_i, b_i, c_i ; Ausgänge: s_i, c_{i+1}).

Schaltungen

Halbaddierer (HA) und Volladdierer (VA)

**Merke:**

Die Schaltung des Volladdierers (VA) besteht aus zwei Halbaddierern (HA) und einem oder-Gatter.

Volladdierer