

Boolesche Funktionen

a, b, c, d, e seien boolesche Variable, denen vermöge der Abbildungsvorschriften

$$(a, b, c) \rightarrow f(a, b, c) \quad \text{bzw.} \quad (a, b) \rightarrow f(a, b)$$

der boolsche Funktionswert $f(a, b, c)$ bzw. $f(a, b)$ zugeordnet wird.

Mit \hat{a} oder NOT a bezeichnen wir die Negation von a.

1. Negation

a	\hat{a}
0	1
1	0

2. AND (Konjunktion)

$$(a, b) \rightarrow a \text{ AND } b \quad (\text{Vereinbarung: } a \text{ AND } b = a \cdot b = ab)$$

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. OR (Disjunktion)

$$(a, b) \rightarrow a \text{ OR } b \quad (\text{Vereinbarung: } a \text{ OR } b = a + b)$$

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

4. XOR (eXclusive OR)

$$(a, e) \rightarrow a \text{ XOR } e \quad (\text{Vereinbarung: } a \text{ XOR } e = a \oplus e)$$

a	e	$a \oplus e$	
0	0	0	
0	1	1	↙
1	0	1	↙
1	1	0	

Disjunktion der Konjunktionen:

$$a \text{ XOR } e = 0 + \hat{a} \cdot e + a \cdot \hat{e} + 0 = \hat{a} \cdot e + a \cdot \hat{e}$$

5. Gegeben ist die Zuordnung $(a, b, c) \rightarrow f(a, b, c)$ mittels folgender Wertetabelle; ermittle einen möglichst einfachen Funktionsterm:

a	b	c	$f(a, b, c)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	↙
0	1	1	0	
1	0	0	1	↙
1	0	1	0	
1	1	0	1	↙
1	1	1	0	

Disjunktion der Konjunktionen:

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= \text{NOT}a \cdot b \cdot \text{NOT}c + a \cdot \text{NOT}b \cdot \text{NOT}c + a \cdot b \cdot \text{NOT}c \\
 &= [\text{NOT}a \cdot b + a \cdot \text{NOT}b + a \cdot b] \text{ NOT}c \\
 &= [\text{NOT}a \cdot b + a \cdot (\text{NOT}b + b)] \text{ NOT}c \\
 &= [\text{NOT}a \cdot b + a \cdot 1] \cdot \text{NOT}c \\
 &= [\text{NOT}a \cdot b + a] \cdot \text{NOT}c \\
 &= [a + \text{NOT}a \cdot b] \cdot \text{NOT}c \\
 &= [(a + \text{NOT}a) \cdot (a + b)] \cdot \text{NOT}c \\
 &= [1 \cdot (a+b)] \cdot \text{NOT}c \\
 &= (a+b) \cdot \text{NOT}c
 \end{aligned}$$

Hinweis:

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a + bc = (a+b) \cdot (a+c)$$

Theoreme zum Rechnen mit Booleschen Variablen

Voraussetzung: a, e, u seien Boolesche Variable, mit $\hat{a}, \hat{e}, \hat{u}$ werden die Negationen von a, e, u bezeichnet.

Kommutativgesetz

$$(1) \quad a \cdot e = e \cdot a \quad (1)' \quad a + e = e + a$$

Assoziativgesetz

$$(2) \quad a \cdot (e \cdot u) = (a \cdot e) \cdot u \quad (2)' \quad a + (e + u) = (a + e) + u$$

Distributivgesetz

$$(3) \quad a \cdot (e + u) = a \cdot e + a \cdot u \quad (3)' \quad a + e \cdot u = (a + e) \cdot (a + u)$$

Absorptionsgesetz

$$(4) \quad a \cdot (a + e) = a \quad (4)' \quad a + a \cdot e = a$$

Tautologie

$$(5) \quad a \cdot a = a \quad (5)' \quad a + a = a$$

Gesetz über die Negation

$$(6) \quad a \cdot \hat{a} = 0 \quad (6)' \quad a + \hat{a} = 1$$

Doppelte Negation

$$(7) \quad \text{NOT}(\text{NOT } a) = a$$

De Morgans Gesetz

$$(8) \quad \text{NOT}(a \cdot e) = \text{NOT } a + \text{NOT } e \quad (8)' \quad \text{NOT}(a + e) = \text{NOT } a \cdot \text{NOT } e$$

Operationen mit 0 und 1

$$(9.1) \quad a \cdot 1 = a \quad (9.1)' \quad a + 0 = a$$

$$(9.2) \quad a \cdot 0 = 0 \quad (9.2)' \quad a + 1 = 1$$

$$(9.3) \quad \text{NOT } 0 = 1 \quad (9.3)' \quad \text{NOT } 1 = 0$$

Halbaddierer und Volladdierer

Die Ziffern einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl a ergeben sich als Aneinanderreihung der Koeffizienten aus der Dezimalzerlegung (Summe von Zehnerpotenzen) von a ; entsprechend erhalten wir die Darstellung von a im Dualsystem als Aneinanderreihung der Koeffizienten aus der Dualzerlegung (Summe von Zweierpotenzen).

$$87_{\text{dezimal}} = 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$87_{\text{dezimal}} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1010111_{\text{dual}}$$

Addition der Dualzahlen

$$a = a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0 \quad \text{und} \quad b = b_3 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 :$$

	a_3	a_2	a_1	a_0		1	1	0	1
+	b_3	b_2	b_1	b_0		1	1	0	0
s ₄	s ₃	s ₂	s ₁	s ₀		0	0	0	0

Den Übertrag („carry“), der sich aus der i -ten Stelle ergibt und der bei der Addition in der $(i+1)$ -ten Stelle zu berücksichtigen ist, bezeichnen wir mit c_{i+1} ; $i \geq 0$.

Für die 0-te Stelle genügt ein Halbaddierer mit den Eingängen a_0 und b_0 und den Ergebnissen s_0 und c_1 ; die Addition in der i -ten Stelle, $i \geq 1$, erfordert einen Volladdierer mit den Eingängen a_i , b_i , c_i und den Ergebnissen s_i und c_{i+1} .

Halbaddierer HA

Wahrheitstafel:

a_0	b_0	s_0	c_1
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Wir ermitteln für s_0 und c_1 jeweils die disjunktive Normalform („Disjunktion der Konjunktionen“):

$$s_0 = \overline{a_0} \cdot b_0 + a_0 \cdot \overline{b_0} = a_0 \oplus b_0$$

$$c_1 = a_0 \cdot b_0$$

Volladdierer VA

Wahrheitstafel:

a_i	b_i	c_i	s_i	c_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Wir ermitteln für s_i und c_{i+1} jeweils die disjunktive Normalform („Disjunktion der Konjunktionen“) und vereinfachen ggf. die booleschen Funktionsterme:

$$s_i = \bar{a}_i \cdot \bar{b}_i \cdot c_i + \bar{a}_i \cdot b_i \cdot \bar{c}_i + a_i \cdot \bar{b}_i \cdot \bar{c}_i + a_i \cdot b_i \cdot c_i$$

ohne Index i geschrieben:

$$s = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c$$

$$s = (\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (\bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (0 + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + 0) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (\bar{a} \cdot a + \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b + b \cdot \bar{b}) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [(\bar{a} + b) \cdot (a + \bar{b})] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{\bar{a}} + \bar{b})] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot (\bar{\bar{a}} \cdot b)] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + [\overline{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b}] \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \cdot \bar{c} + (\overline{a \oplus b}) \cdot c$$

$$s = (a \oplus b) \oplus c$$

mit Index i erhält man:

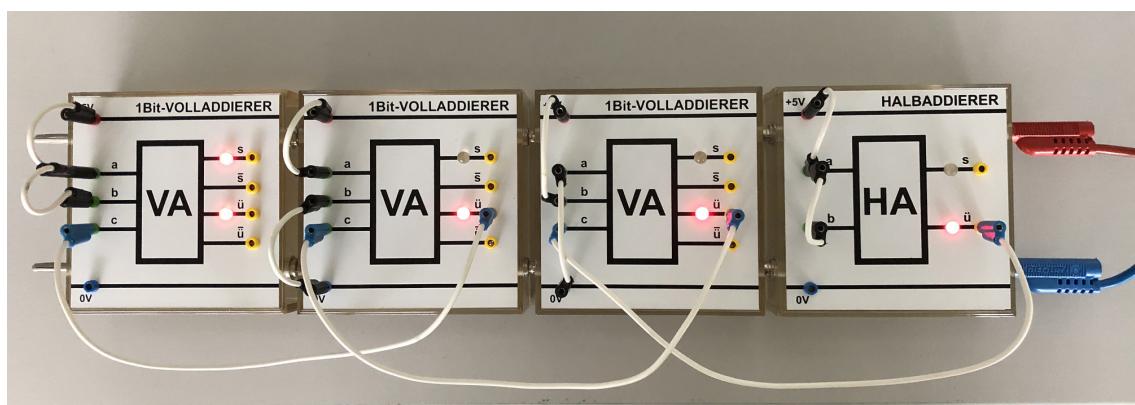
$$s_i = (a_i \oplus b_i) \oplus c_i$$

$$c_{i+1} = \bar{a}_i \cdot b_i \cdot c_i + a_i \cdot \bar{b}_i \cdot c_i + a_i \cdot b_i \cdot \bar{c}_i + a_i \cdot b_i \cdot c_i$$

$$c_{i+1} = (\bar{a}_i \cdot b_i + a_i \cdot \bar{b}_i) \cdot c_i + a_i \cdot b_i \cdot (\bar{c}_i + c_i)$$

$$c_{i+1} = (\bar{a}_i \cdot b_i + a_i \cdot \bar{b}_i) \cdot c_i + a_i \cdot b_i \cdot 1$$

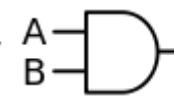
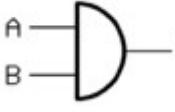
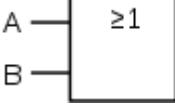
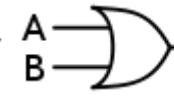
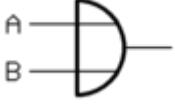
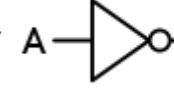
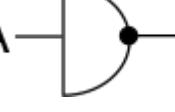
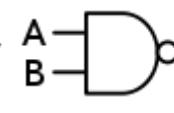
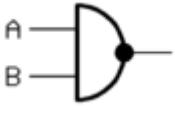
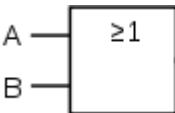
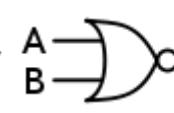
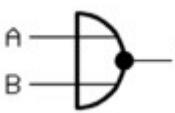
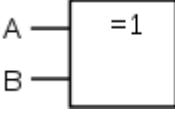
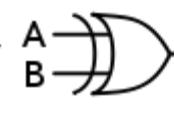
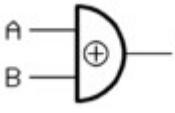
$$c_{i+1} = (a_i \oplus b_i) \cdot c_i + a_i \cdot b_i$$



07.10.2020

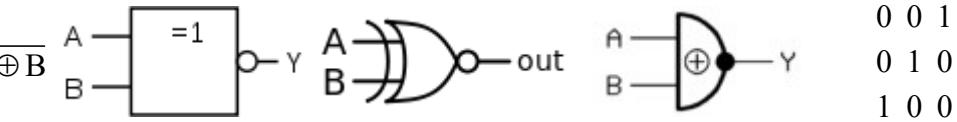
Typen von Logikgattern und Symbolik

Logikgatter werden mit Schaltsymbolen bezeichnet, die nach unterschiedlichen, mehr oder weniger parallel existierenden Standards definiert sind.

Name	Funktion	Symbol in Schaltplan	Wahrheitstabelle															
		<u>IEC 60617-12 :</u> 1997 & <u>ANSI/IEEE Std</u> <u>91/91a-1991</u>																
<u>Und-Gatter</u> (AND)	$Y = A \cdot B$	  	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
A	B	Y																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
<u>Oder-Gatter</u> (OR)	$Y = A + B$	  	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
A	B	Y																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
<u>Nicht-Gatter</u> (NOT)	$Y = \overline{A}$	  	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	Y	0	1	1	0									
A	Y																	
0	1																	
1	0																	
<u>NAND-Gatter</u> (NICHT UND) (NOT AND)	$Y = \overline{A \cdot B}$	  	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	Y																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
<u>NOR-Gatter</u> (NICHT ODER) (NOT OR)	$Y = \overline{A+B}$	  	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
A	B	Y																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																
<u>XOR-Gatter</u> (Exklusiv-ODER, Antivalenz) (eXclusiveOR)	$Y = A \oplus B$	  	<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	A	B	Y	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	Y																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																

XNOR-Gatter

(Exklusiv-Nicht-ODER, $Y = \overline{A \oplus B}$
Äquivalenz)
(eXclusive
Not OR)



A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Früher waren auf dem europäischen Kontinent die deutschen Symbole (rechte Spalte) verbreitet; im englischen Sprachraum waren und sind die amerikanischen Symbole (mittlere Spalte) üblich. Die IEC-Symbole sind international auf beschränkte Akzeptanz gestoßen und werden in der amerikanischen Literatur (fast) durchgängig ignoriert.

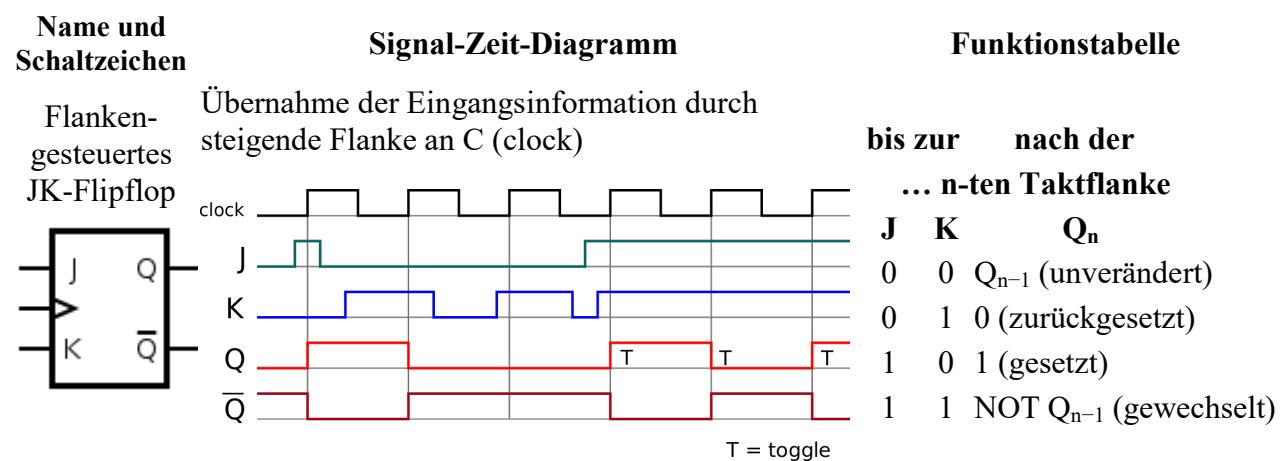
JK-Flipflop

Ein Flip-Flop (bistabile Kippstufe oder bistabiler Multivibrator) hat zwei stabile Zustände am Ausgang Q; die Zustände heißen „gesetzt“ (set) oder „zurückgesetzt“ (reset). Ein 1-Bit-Speicher lässt sich somit als FlipFlop realisieren.

Ein JK-FlipFlop ist ein taktgesteuertes FlipFlop: die an den Eingängen J und K liegende Information wird mit einer Flanke (hier: der steigenden Flanke) des an C liegenden Taktsignals auf die Ausgänge Q und \bar{Q} übernommen.

Mit dem Taktsignal (clock, C) und der Eingangsbelegung J = 1 und K = 0 wird am Ausgang Q eine 1 erzeugt und gespeichert, alternativ eine 0 bei J = 0 und K = 1.

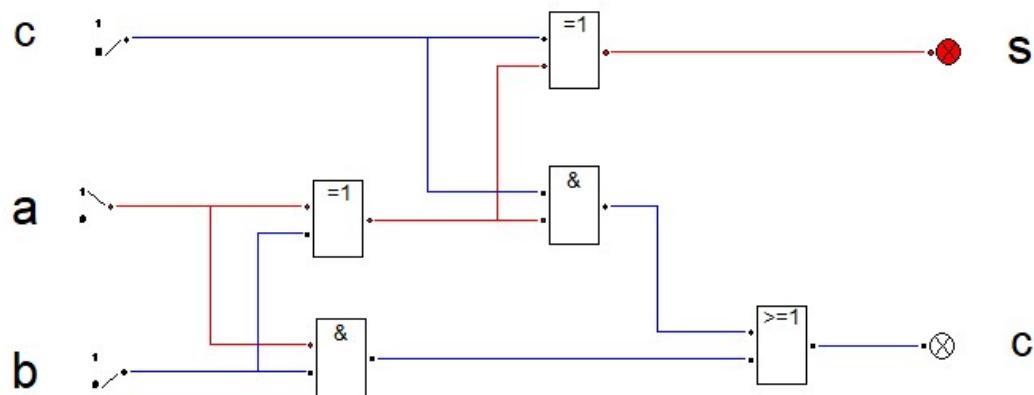
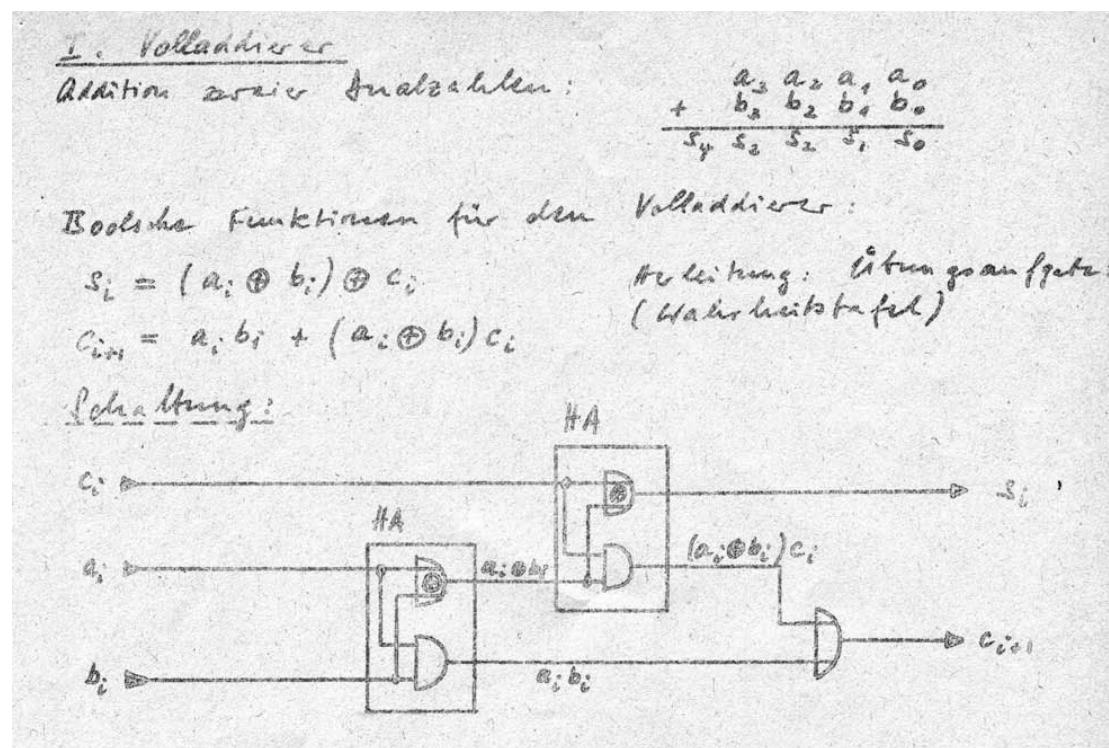
Bei der Realisierung des JK-Flipflops als taktflankengesteuertes Flipflop kann der Eingang C für steigende Flanken (Wechsel von 0 auf 1) oder für fallende Flanken (Wechsel von 1 auf 0) ausgelegt sein.



(Wikipedia)

Halbaddierer (HA) und Volladdierer (VA)

Schaltungen



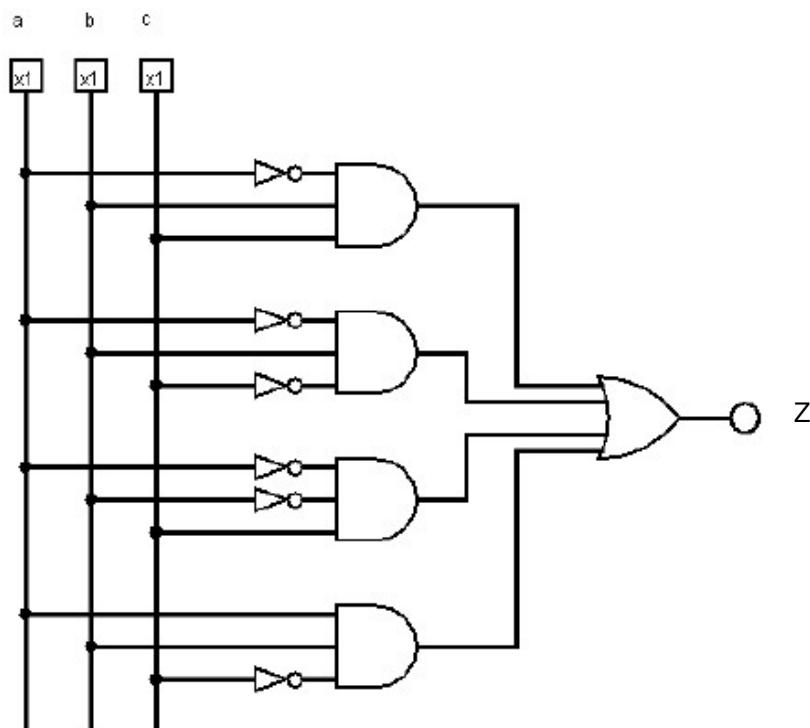
Informatik 13
Übungsaufgabe 07.10.2020

Gegeben ist die boolesche Funktion $z = f(a, b, c)$ vermöge folgender Wahrheitstafel:

a	b	c	z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Leite den Booleschen Funktionsterm für die Funktion f her.
- Vereinfache diesen Term mit Hilfe der Rechenregeln für Boolesche Terme.

1. Gegeben ist folgende digitale Schaltung mit den Eingängen a , b , c und dem Ausgang z :

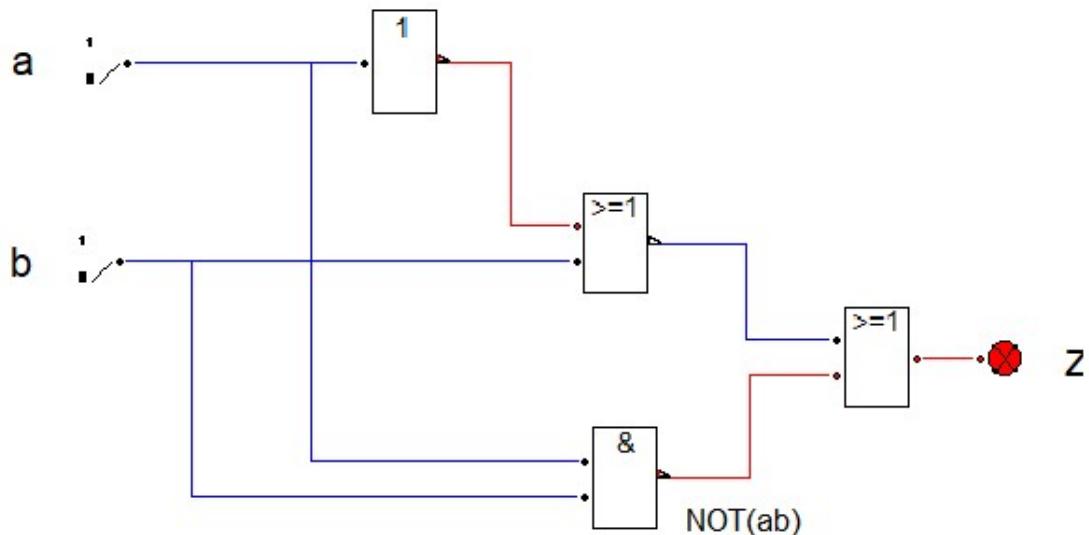


- a) Erstelle die Wahrheitstafel für diese Schaltung und ermittle die disjunktive Normalform für die Boolesche Funktion $z = f(a,b,c)$.
- b) Vereinfache den Funktionsterm für z und zeichne die vereinfachte Schaltung.
2. Die Boolesche Funktion $z = f(a,b,c)$ ist durch folgende Wahrheitstafel gegeben:

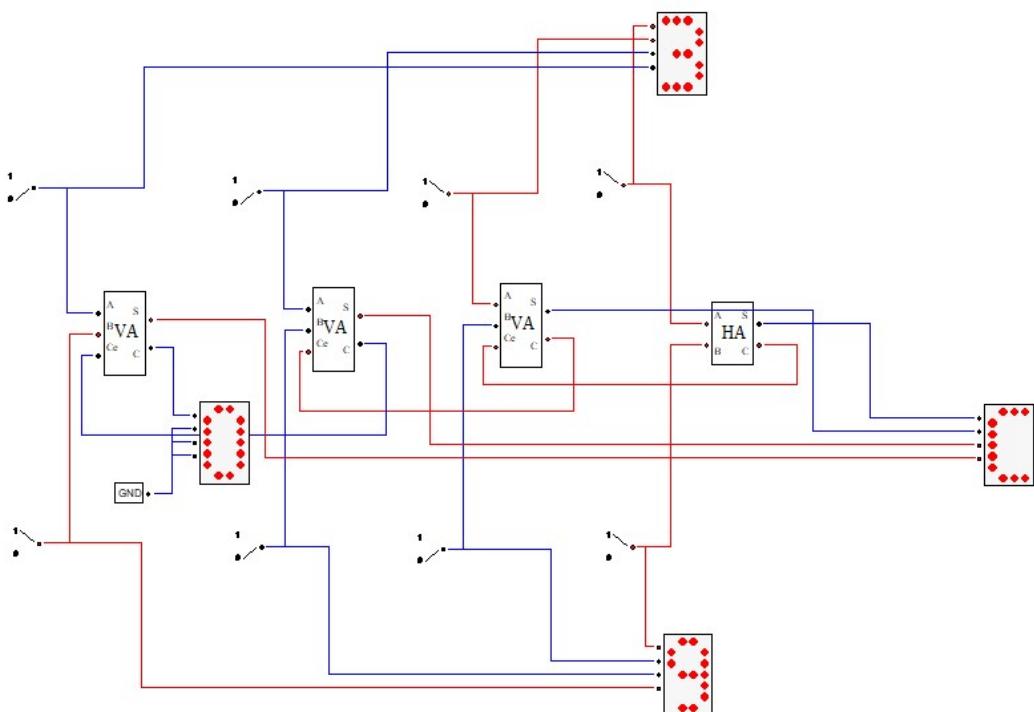
a	b	c	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- a) Ermittle die disjunktive Normalform für z und vereinfache den Funktionsterm.
- b) Zeichne den Schaltplan für die optimierte Funktion z .

3. Gegeben ist folgende digitale Schaltung mit den Eingangsvariablen a , b und der Ausgangsvariablen z :

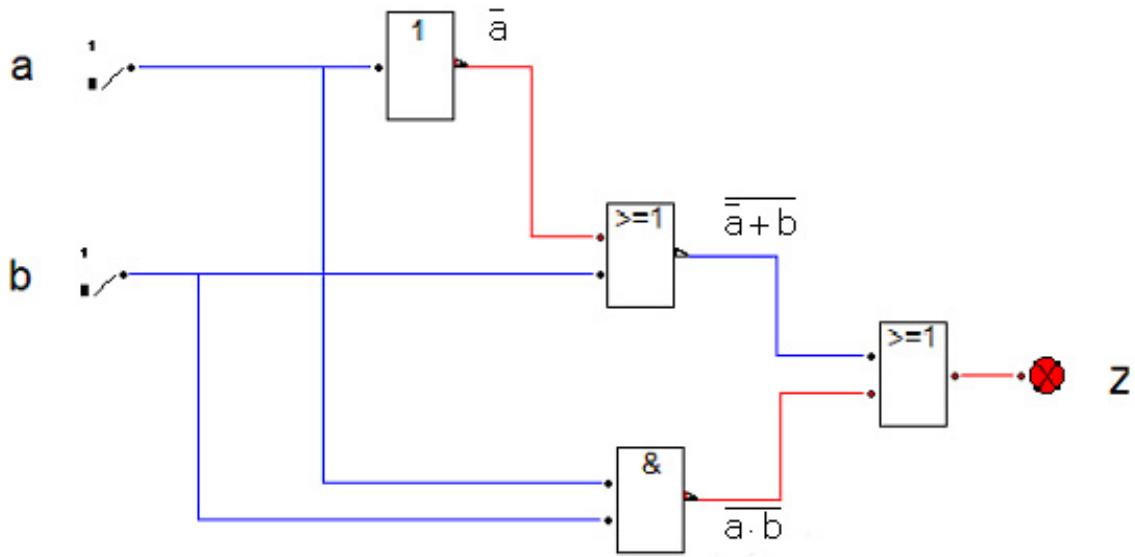


- Ermittle den Booleschen Term für die Boolesche Funktion $z = f(a,b,c)$.
Hinweis: Notiere am Ausgang jedes Gatters jeweils den Booleschen Term
(Beispiel: $\overline{a} \cdot b$ am Ausgang des NAND-Gatters).
 - Vereinfache den in a) erhaltenen Term unter Verwendung der Rechenregeln für Boolesche Ausdrücke; erstelle die Wahrheitstafel.
 - Zeichne das Schaltbild für den vereinfachten Funktionsterm und teste beide Schaltungsvarianten mit einem Digitalsimulator.
4. 4-Bit-Paralleladdierer mit Anzeige der Summanden und der Summe jeweils im Hexadezimalformat



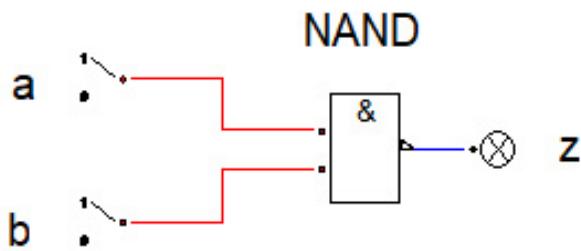
Erweitere die Schaltung „4-bit-Paralleladdierer.dsim“ (auf www.kalle2000.de downloadbar) zu einem 8-Bit-Addierer mit numerischer Anzeige.

Lösung zu Nr. 3 von Aufgabenblatt 2 vom 29.10.2020



$$\begin{aligned}
 z &= \overline{\bar{a} + b} + \overline{a \cdot b} \\
 &= \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} + (\bar{a} + \bar{b}) \quad (2\text{-mal de Morgan}) \\
 &= a \cdot \bar{b} + \bar{a} + \bar{b} \quad (\text{wegen } \overline{\bar{a}} = a) \\
 &= \bar{a} + \bar{b} \cdot a + \bar{b} \quad (\text{Kommutativgesetze}) \\
 &= \bar{a} + \bar{b} \cdot a + \bar{b} \cdot 1 \quad (\text{wegen } a = a \cdot 1) \\
 &= \bar{a} + \bar{b} \cdot (a + 1) \quad (\text{Distributivgesetz}) \\
 &= \bar{a} + \bar{b} \quad (\text{wegen } a + 1 = 1) \\
 &= \overline{a \cdot b} \quad (\text{de Morgan})
 \end{aligned}$$

optimierte Schaltung:



Wertetabelle:

a	b	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5. Für die Boolesche Funktion $y = f(a,b,c)$ ist folgende Wertetafel gegeben:

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- Ermittle die DNF (disjunktive Normalform) für y .
- Vereinfache den Funktionsterm unter Verwendung der Booleschen Rechenregeln.
- Zeichne das Schaltbild für die vereinfachte Funktion.

Die Boolesche Funktion
 $z = f(a,b,c)$
 ist durch nebenstehende
 Wahrheitstafel
 gegeben:

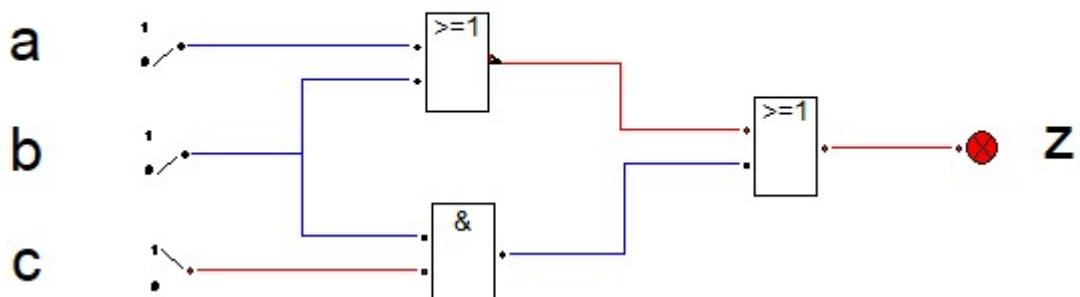
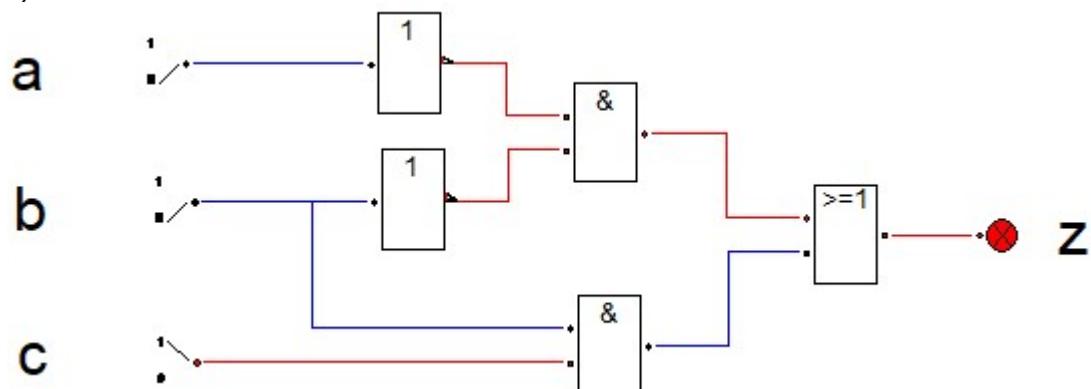
a	b	c	z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Ermittle die disjunktive Normalform für z.
- Vereinfache den Funktionsterm unter Anwendung der Booleschen Rechengesetze.
- Zeichne den Schaltplan für die optimierte Funktion z.

Lösung:

- $$Z = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c$$
- $$\begin{aligned} Z &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (\bar{c} + c) + b \cdot c \cdot (\bar{a} + a) \quad \text{Kommutativ- und Distributivgesetz} \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot 1 + b \cdot c \cdot 1 \\ &= \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot c \\ &= \overline{a+b} + b \cdot c \end{aligned}$$

c)



Die wesentlichen Komponenten einer **CENTRAL PROCESSING UNIT (CPU)** bestehen aus der **CONTROL UNIT (CU)** und der **ARITHMETIC LOGIC UNIT (ALU)**.

Die **ALU** berechnet arithmetische und logische Funktionen, die **CU** decodiert die im Arbeitsspeicher abgelegten Befehle und führt sie aus.

In der Minimalkonfiguration beherrscht die **ALU** die arithmetische Funktion „**Addition**“ sowie die logischen Operationen „**Negation**“ (NOT) und „**Konjunktion**“ (AND). Zu Lasten der Rechenzeit lassen sich die übrigen arithmetischen und logischen Funktionen auf die genannten, minimal verfügbaren Operationen zurückführen.

1. Subtraktion

Die duale Subtraktion

$$\begin{array}{r} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ - & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \end{array}$$

lässt sich auf eine duale Addition nach folgendem Verfahren zurückführen:

- Bilde das Einerkomplement des Subtrahenden $b_3\ b_2\ b_1\ b_0$, indem man alle Ziffern negiert (invertiert; aus 0 wird 1 und aus 1 wird 0).
 - Addiere das Einerkomplement und die Zahl 1 zum Minuenden.
 - Das Ergebnis ist die gesuchte Differenz; dabei bleibt der Überlauf unberücksichtigt.
- Verdeutliche das genannte Verfahren anhand einiger selbst gewählter Beispiele (ein Beweis des Verfahrens ist nicht erforderlich.).
 - Ergänze die Schaltung „4-bit-Paralleladdierer.dsim“ so, daß man nach entsprechender Umschaltung wahlweise eine duale Addition oder eine duale Subtraktion durchführen kann.
Hinweise:
 - Ersetze den HA für das least significant bit (LSB) durch einen VA, um erforderlichenfalls eine „1“ als Summand einspeisen zu können (wie?).
 - Die Invertierung der Ziffern des Subtrahenden gelingt z. B. durch den geeigneten Einsatz von XOR-Gattern.

2. Weitere Rechenoperationen

Gegeben sind die (im einfachsten Fall positiven ganzzahligen) Operanden a und b. Um zu verdeutlichen, wie man die „höheren“ Rechenoperationen mittels geeigneter Iteration auf die Grundoperationen „Addition“ und „Subtraktion“ zurückführen kann, schreibe und teste ein Python-Programm, welches die Operationen „Multiplikation“ ($a*b$), „Division“ (a/b , ganzzahlige Division) und „Potenzierung“ ($a^{**}b$) realisiert.

3. Logische Operationen

Zeige exemplarisch, daß sich die logischen Verknüpfungen

- $a + b$
- $a \oplus b$
- $a \cdot (b + \bar{c})$

auf die Operationen NOT und AND zurückführen lassen.

M. M. 20 SCHIEBREGISTER und DUALZÄHLER

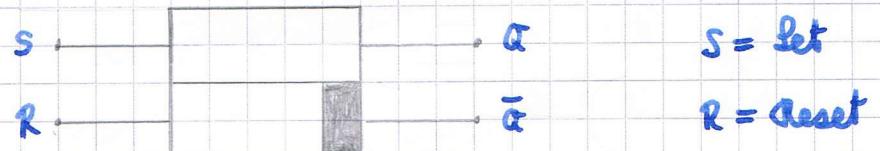
Definition: Unter einem Flip-Flop verstehen wir eine bistabile Tippstufe mit genau 2 stabilen Zuständen, so dass der Informationsgehalt von 1 Bit gespeichert werden kann.

$$1 \triangleq \text{TRUE} \triangleq 5 \text{ Volt}$$

$$0 \triangleq \text{FALSE} \triangleq 0 \text{ Volt}$$

Schaltzeichen:

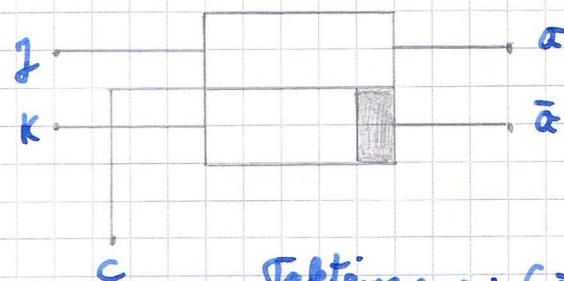
a) nicht getaktet:



Zustandstabelle:

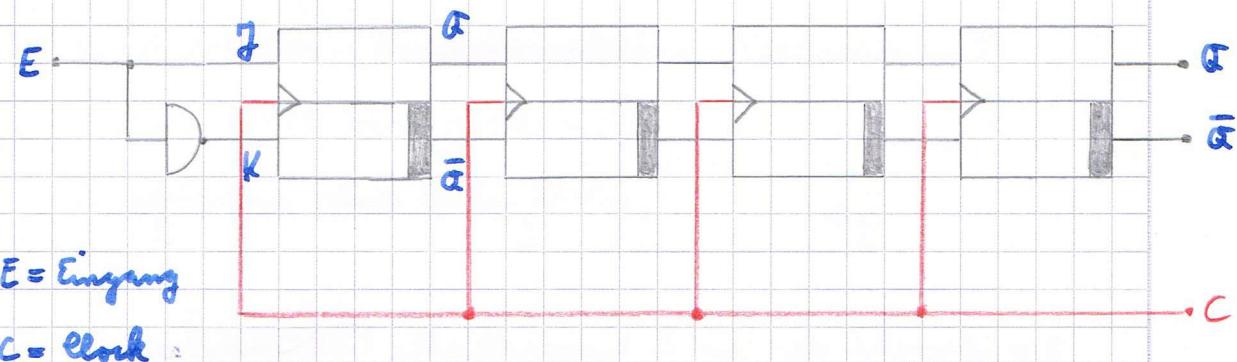
S	R	Erfolgszustand	
		Q	\bar{Q}
0	0	keine Änderung	
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	-	-

b) getaktet:



Die an den Eingängen J und K komplementär anliegende Information wird erst dann auf die Ausgänge Q und \bar{Q} übertragen, wenn an C die fallende (oder auch die steigende) Taktflanke eines Rechtecksignals erscheint

SCHIEBeregister (hier: 4-Bit-Register)



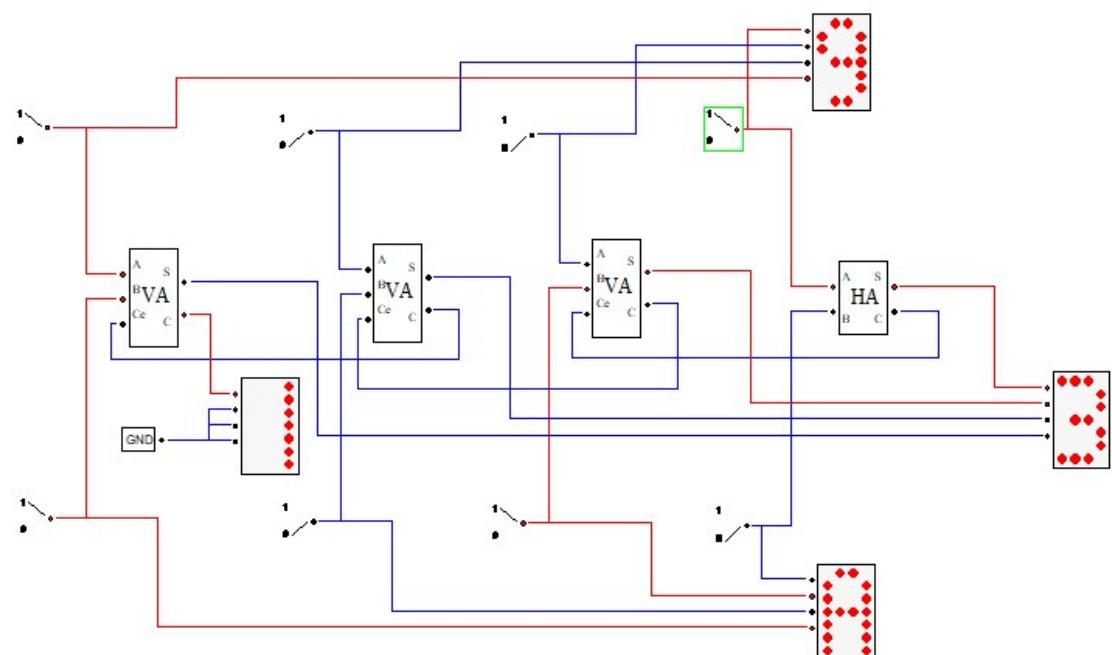
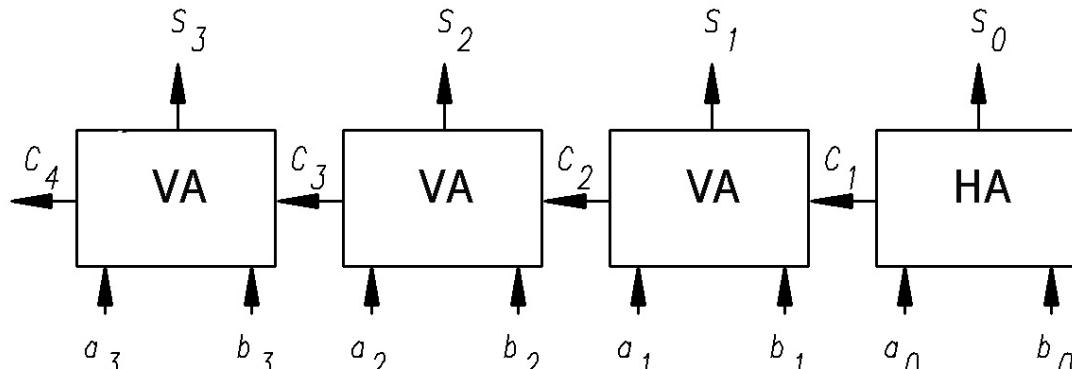
Bei jedem Taktimpuls an C wird die Information um eine Stelle nach „rechts“ geschoben.

Addier-Schaltungen für Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 + & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\
 \hline
 s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & s_0
 \end{array}$$

1. Paralleladdierer mit serielltem Übertrag (hier: 4-Bit-Addierer)

Für das Least Significant Bit (LSB) genügt ein Halbaddierer (HA); die höherwertigen Bits erfordern jeweils einen Volladdierer, da hier der Übertrag aus der vorherigen Stelle zu berücksichtigen ist.



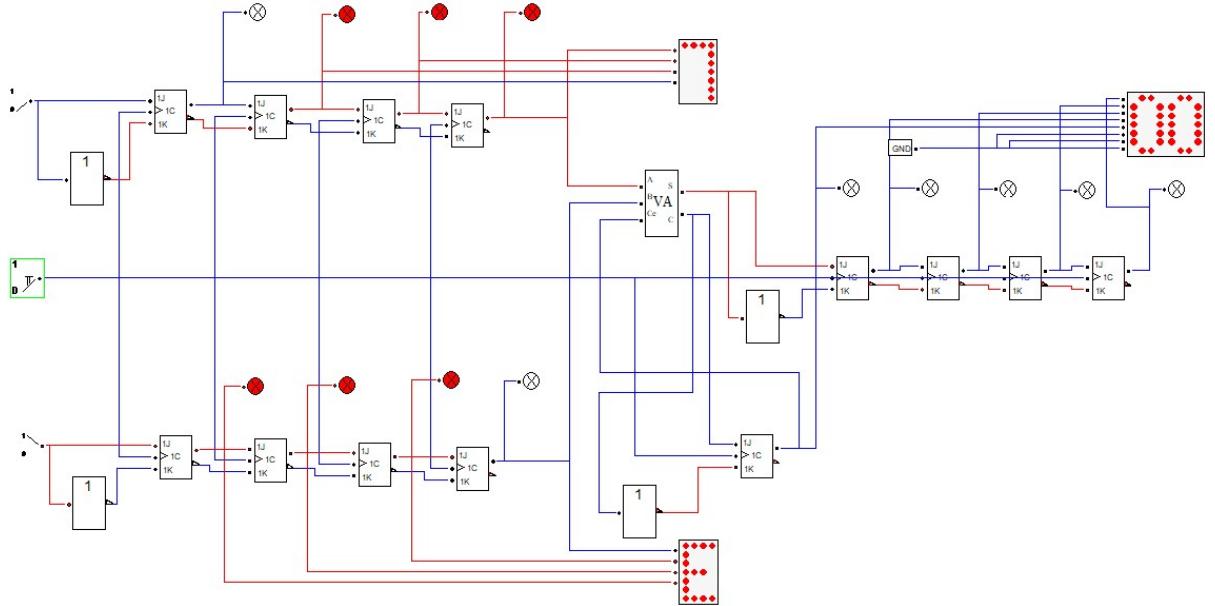
Dezimal:	09	Hexadezimal:
	$+ 10$	$+ 0A$
	<hr/>	<hr/>
	19	13

Dual:	0000 1001	0000 1010
	$+ 0000$	$+ 0001$
	<hr/>	<hr/>
	0001 0011	0001 0011

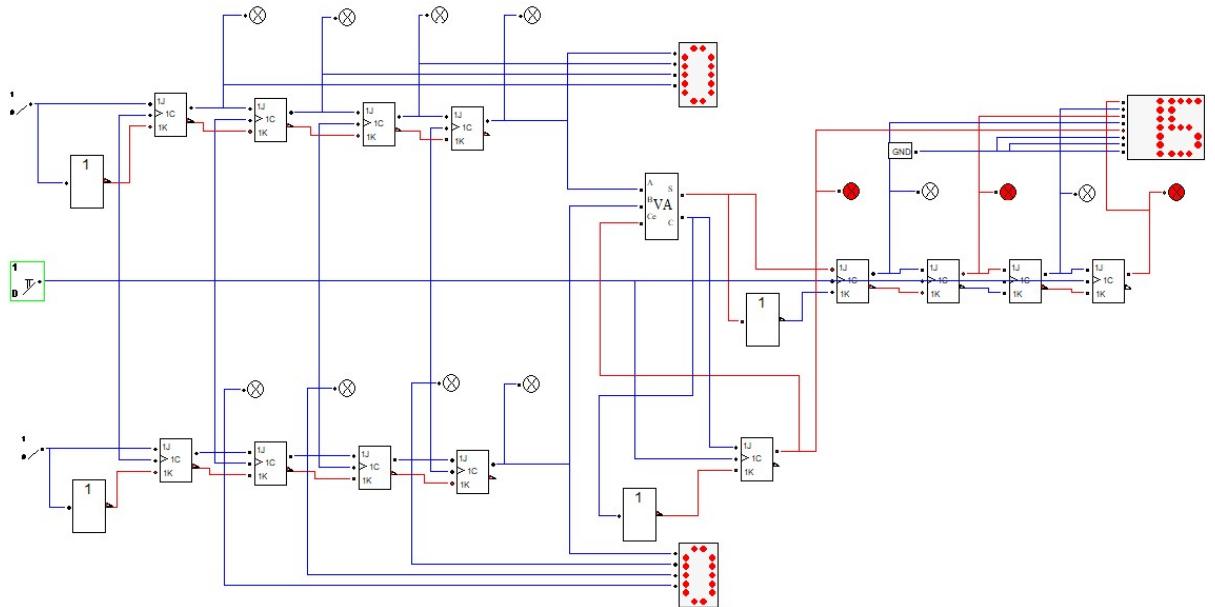
2. Serieller 1-Bit-Addierer für 4-stellige Dualzahlen

Die Operanden werden jeweils in einem 4-Bit-Schieberegister abgelegt, nach 4 Taktimpulsen finden wir das Ergebnis (hier: die Summe) in einem weiteren 4-Bit-Schieberegister.

Da der Übertrag aus der vorherigen Stelle für die Addition in der aktuellen Stelle zu berücksichtigen ist, wird er in einem Flip-Flop zwischengespeichert. Dieses Flip-Flop liefert auch das Most Significant Bit (MSB) des Ergebnisses.



Nach 4 Taktimpulsen (hier: Triggerung der Flip-Flops auf der steigenden Taktflanke):

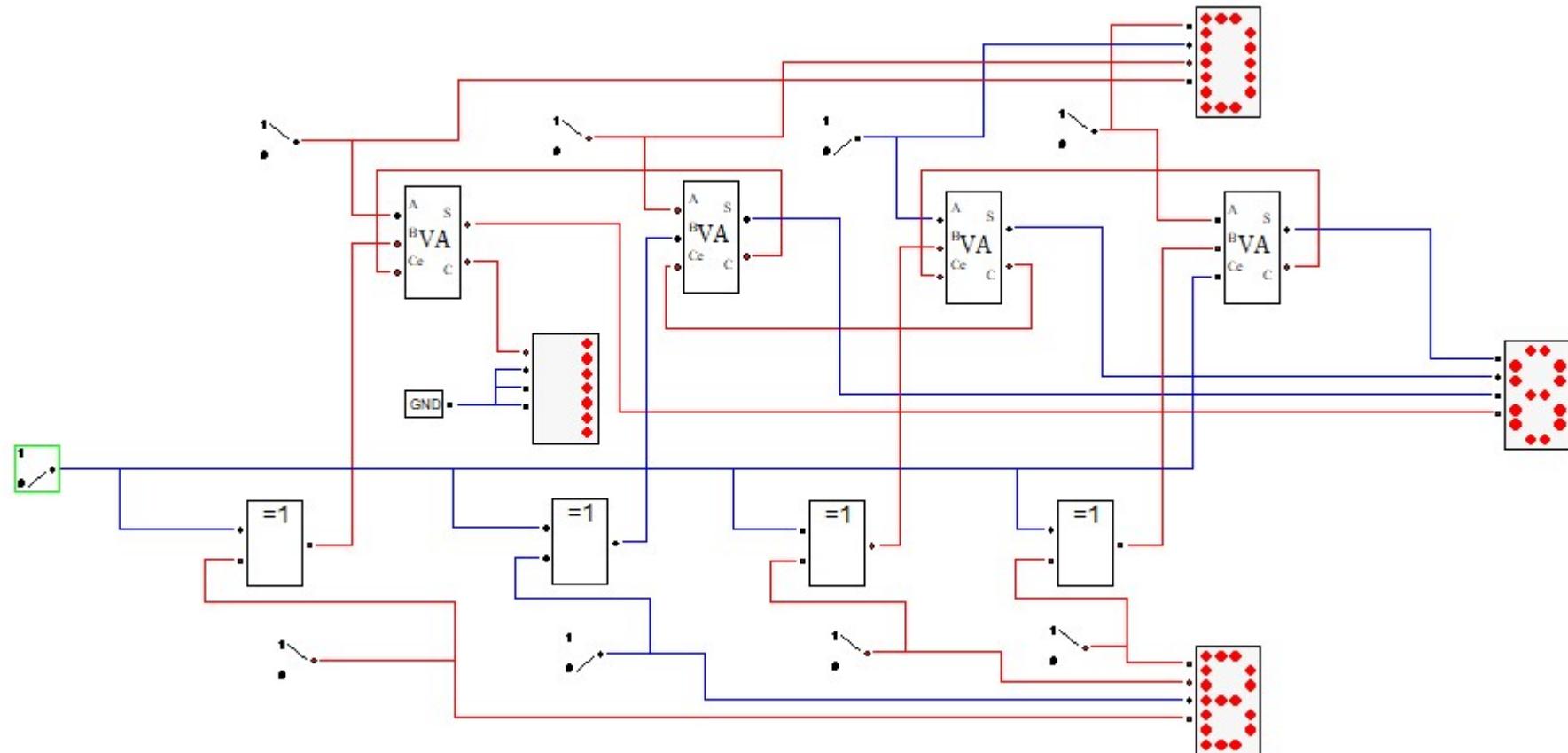


$$\begin{array}{r} \text{Dezimal: } 07 \\ + 14 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Hexadezimal: } 07 \\ + 0E \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Dual: } 0000\ 0111 \\ + 0000\ 1110 \\ \hline 0001\ 0101 \end{array}$$

4-Bit-Paralleladdier mit Umschaltung auf 4-Bit-Parallelsubtraktion

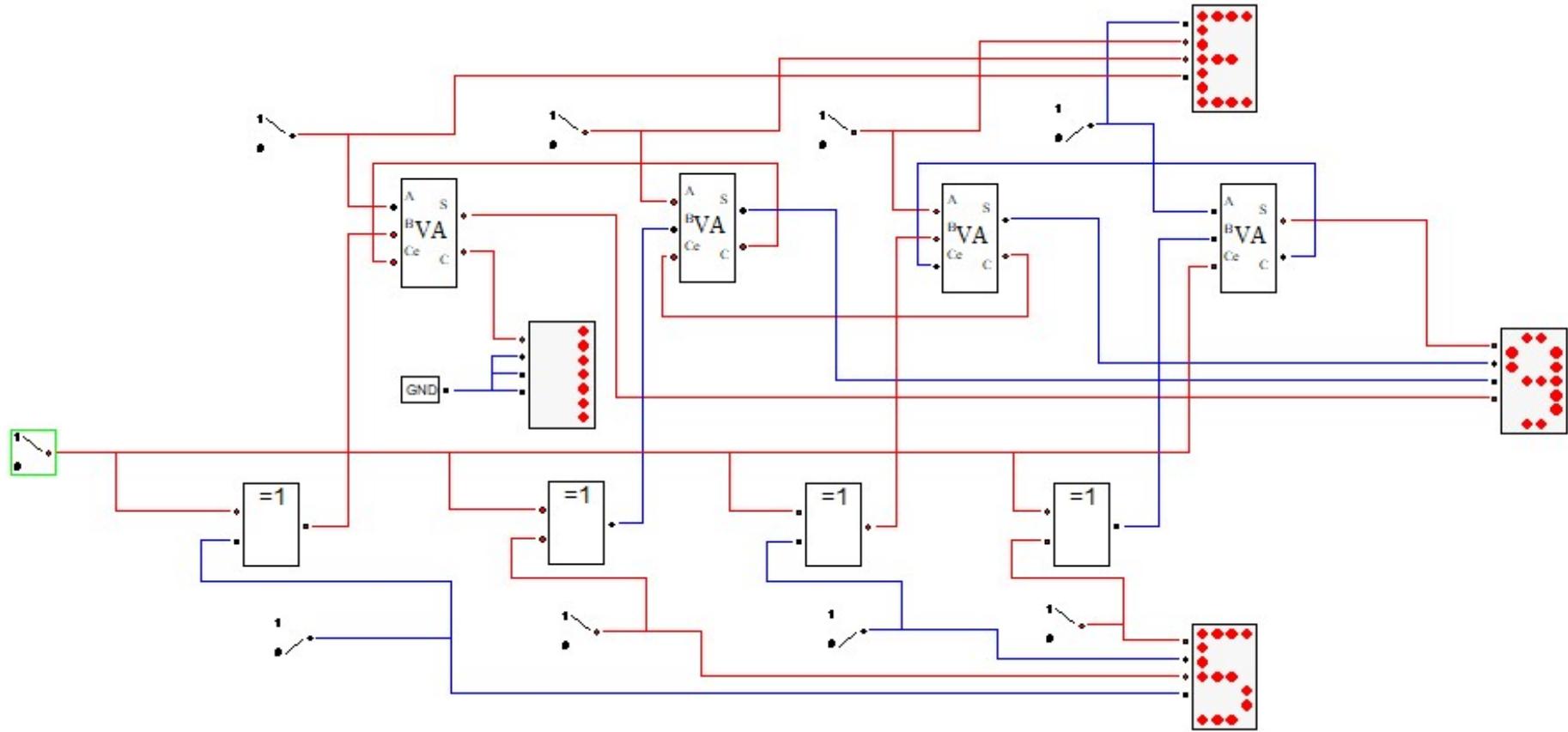


$$\begin{array}{r} \text{Dezimal: } 13 \\ + 11 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Hexadezimal: } 0D \\ + 0B \\ \hline 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Dual: } 0000\ 1101 \\ + 0000\ 1011 \\ \hline 0001\ 1000 \end{array}$$

4-Bit-Paralleladdier mit Umschaltung auf 4-Bit-Parallelsubtraktion

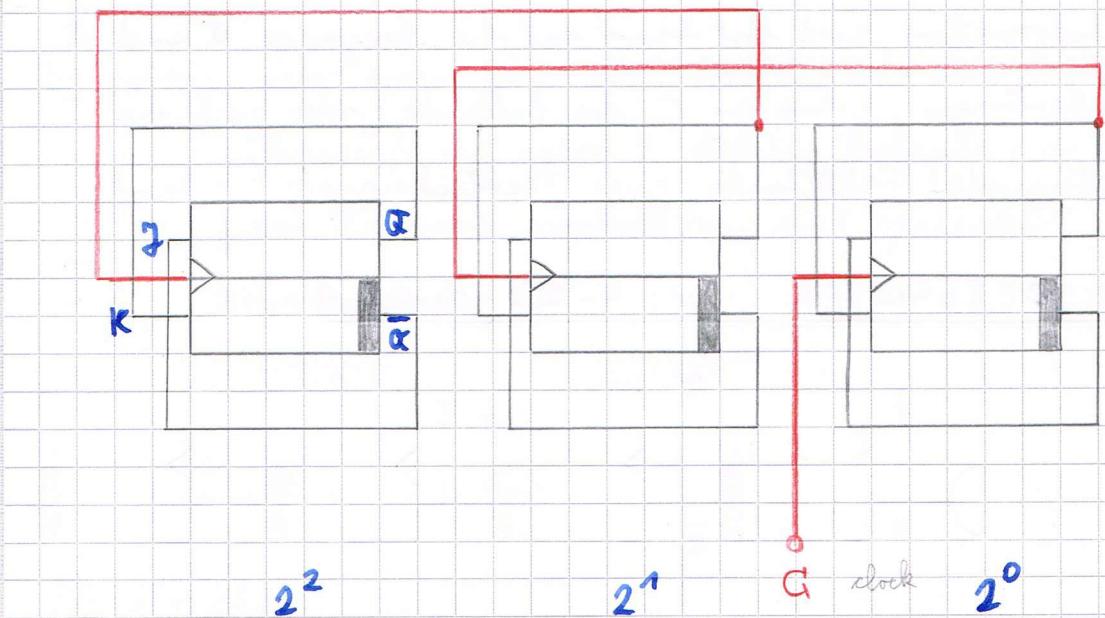


$$\begin{array}{r} \text{Dezimal: } 14 \\ - 05 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Hexadezimal: } 0E \\ - 05 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Dual: } 0000\ 1110 \\ - 0000\ 0101 \\ \hline 0000\ 1001 \end{array}$$

18.11.20

Dualzähler

Z = Anzahl der an G eingespeisten Taktimpulsen
 (genauer: die Anzahl der triggernden Taktflanken,
 hier: fallende Taktflanke)

Z	2^2	2^1	2^0
nach 0 Taktimpulsen	0	0	0
nach 1 Taktimpuls	1	0	1
nach 2 Taktimpulsen	2	0	1
nach 3 Taktimpulsen	3	0	1
nach 4 Taktimpulsen	4	1	0
nach 5 Taktimpulsen	5	1	0
nach 6 Taktimpulsen	6	1	1
nach 7 Taktimpulsen	7	1	1

Bei 3 Flip-Flops: 8 Zustände

Bei n Flip-Flops: 2^n Zustände

Zahlbereich: 0 bis $2^n - 1$

4-Bit-Dualzähler

Schaltung mit alphanumerischer Anzeige des Zählergebnisses

Anzahl der Zustände: 2^4

Zählbereich: 0 $2^4 - 1$

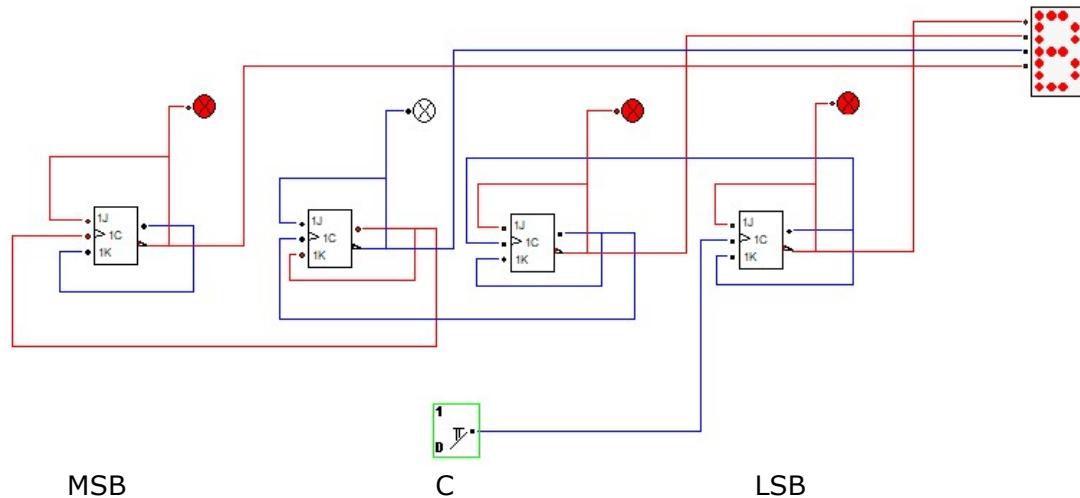
0000	-	1111	(dual)
00	-	FF	(hexadezimal)
0	-	255	(dezimal)

Die am Eingang C eintreffenden Taktimpulse werden gezählt.

Beachte:

Bei Triggerung auf der fallenden Taktflanke erfolgt die Anzeige jeweils am Ausgang Q.

Bei Triggerung auf der steigenden Taktflanke erfolgt die Anzeige jeweils am Ausgang \bar{Q} .



hier: Triggerung auf der steigenden Taktflanke, daher werden die Stellen (Bits) der Dualzahl jeweils dem Ausgang \bar{Q} eines jeden Flip-Flops entnommen.