Informatik 12
Mai 2021

Boolesche Terme und Schaltalgebra

1. Datentyp boolean

Eine Boolesche Variable oder ein Boolescher Ausdruck (Term) nimmt nur zwei Werte an: **`True`** oder **`False`**
(abkürzend: 1 oder 0; in Python sind **`True`** oder **`False`** zu verwenden)

Insbesondere sind folgende Terme Boolesche Ausdrücke, deren Wert sich auch einer Variablen zuweisen läßt:

`8 > 5` hat den Wert **`True`**
`7 == 8` hat den Wert **`False`**
`7 != 8` hat den Wert **`True`**
`x` hat den Wert **`True`** nach der Wertzuweisung **`x = 7 < 12`**
`x` hat den Wert **`False`** nach der Wertzuweisung **`x = (0 == 6)`**
`a or b` hat den Wert **`True`** genau dann, wenn mindestens eine der Variablen **`a`**, **`b`** den Wert **`True`** hat; andernfalls hat **`a or b`** den Wert **`False`**.

Mit **`a = 7 != 8`** oder **`a = (7 != 8)`** wird in Python der Booleschen Variablen **`a`** der Wert des Booleschen Terms **`7 != 8`** , also **`True`**, zugewiesen.

Wir definieren die Verknüpfungen **`and`** und **`or`** sowie die Operation **`not`** jeweils über eine Wahrheitstafel:

a	b	a or b
False	False	False
False	True	True
True	False	True
True	True	True

a	b	a and b
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

a	not a
False	True
True	False

Abkürzende Schreibweisen (a, b, c sind Boolesche Variable oder Boolesche Terme):

`a and b` = $a \wedge b$ = $a \cdot b$ = **`a b`**
`a or b` = $a \vee b$ = **`a + b`**
`not a` = $\neg a$ = $\overline{a}$

Dabei gelte auch die aus der Algebra bekannte Vereinbarung "Punkt vor Strich", d. h.

`a + (b · c) = a + b · c = a + b c`

Die **AND**-Verknüpfung nennen wir auch **Konjunktion**,
die **OR**-Verknüpfung **Disjunktion**.

2. Rechenregeln für Boolesche Variable

Kommutativgesetz

(1) $a + b = b + a$ (1′) $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (2′) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz

(3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (3′) $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$

Absorptionsgesetz

(4) $a(a + b) = a$ **(4′)** $a + ab = a$

Tautologie

(5) $a \cdot a = a$ **(5′)** $a + a = a$

Gesetz über die Negation

(6) $\bar{a} \cdot a = 0$ **(6′)** $\bar{a} + a = 1$

Doppelte Negation

(7) $\bar{\bar{a}} = a$

Gesetz von De Morgan

(8) $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$ **(8′)** $\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

Operationen mit 0 und 1

(9.1) $a \cdot 1 = a$ **(9.1′)** $a + 0 = a$

(9.2) $a \cdot 0 = 0$ **(9.2′)** $a + 1 = 1$

(9.3) $\text{not } 0 = 1$ **(9.3′)** $\text{not } 1 = 0$

Bemerkung: Die in einer Zeile jeweils stehenden Gesetze sind duale Gesetze voneinander; Beispiel: (3′) ist das duale Gesetz von (3), (3) das duale Gesetz von (3′).

Beweis von Rechengesetz (3):

a	b	c	b + c	a(b + c)	ab	ac	ab + ac
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Da die Spalten zu **a(b + c)** und **ab + ac** übereinstimmen, gilt: **a(b + c) = ab + ac** .

Aufgaben:

1. Beweise das Distributivgesetz (3′).
2. Beweise die Gesetze von De Morgan.
   Hinweis: Wahrheitstafel; außer den Spalten für a und b (4 Zeilen) erstelle Spalten für $a \cdot b$, $\overline{a \cdot b}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b}$ für Regel (8).
3. Unter der Disjunktion **a or b** versteht man das nichtausschließende **oder** („non-exclusive or"), d. h., **a or b** ist genau dann **True**, falls **a** oder **b** oder sowohl **a** als auch **b** **True** sind („oder" im Sinne von lat. vel).
   Unter der Verknüpfung **a xor b** (andere Schreibweise: **a** $\oplus$ **b**) versteht man das ausschließende **oder** (**ex**clusive **or**), d. h., **a** $\oplus$ **b** ist genau dann **True**, falls entweder **a** oder **b** den Wert **True** hat.
   Zeige: **a** $\oplus$ **b** = $\bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$

BEISPIEL 1

Die Boolesche Funktion
z = f(a,b,c)
ist durch nebenstehende Wahrheitstafel gegeben:

a	b	c	z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

a) Ermittle die disjunktive Normalform (**DNF**; Disjunktion von Konjunktionen) für **z**.

b) Vereinfache den Funktionsterm unter Anwendung der Booleschen Rechengesetze.

c) Zeichne den Schaltplan für die optimierte Funktion **z**.

Lösung:

a) $z = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot c$

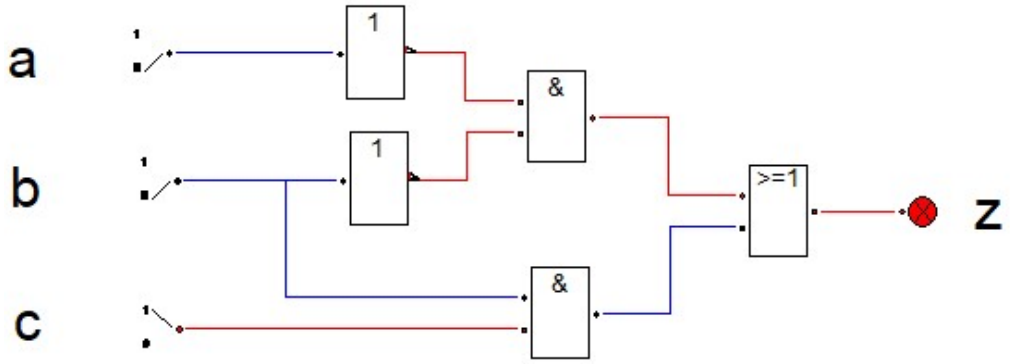
b) $z = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot (\bar{c} + c) + b \cdot c \cdot (\bar{a} + a)$ *Kommutativ- und Distributivgesetz*

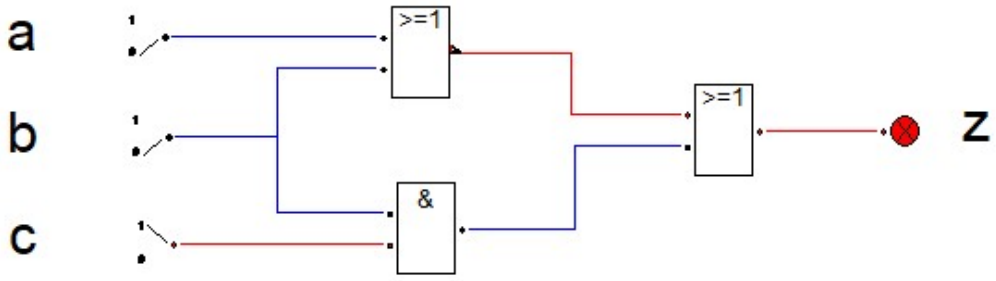
$= \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot 1 + b \cdot c \cdot 1$

$= \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot c$

$= \overline{a+b} + b \cdot c$ *de Morgan's Gesetz*

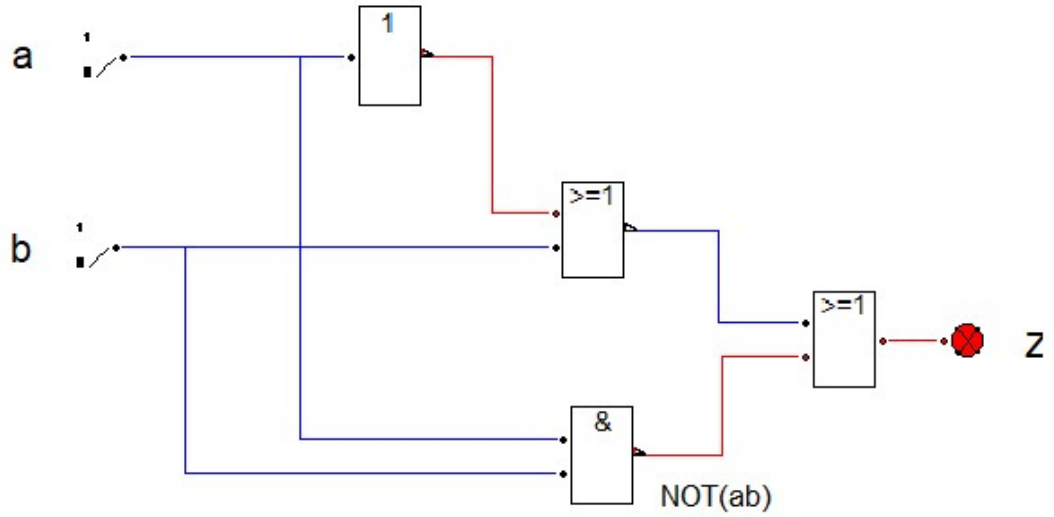
c) $z = \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot c$ (oben) $\qquad z = \overline{a+b} + b \cdot c$ (unten)





BEISPIEL 2

Gegeben ist folgende digitale Schaltung mit den Eingangsvariablen **a**, **b** und der Ausgangsvariablen **z**:



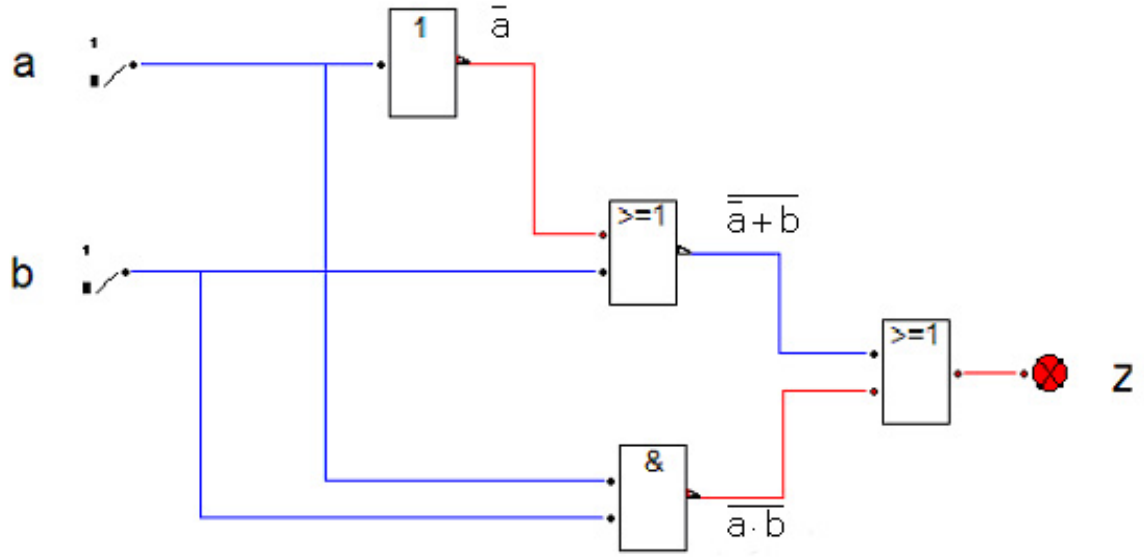
a) Ermittle den Booleschen Term für die Boolesche Funktion **z = f(a,b,c)**. Hinweis: Notiere am Ausgang jedes Gatters jeweils den Booleschen Term (Beispiel: $\overline{a \cdot b}$ am Ausgang des NAND-Gatters).

b) Vereinfache den in a) erhaltenen Term unter Verwendung der Rechenregeln für Boolesche Ausdrücke;

c) Erstelle die Wahrheitstafel und zeichne das Schaltbild für den vereinfachten Funktionsterm; teste beide Schaltungsvarianten mit einem Digitalsimulationsprogramm.

Lösung:

zu a):

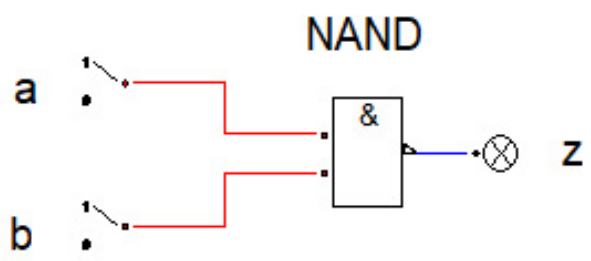


zu b):

$$
\begin{aligned}
z &= \overline{\bar{a} + b} + \overline{a \cdot b} \\
&= \bar{\bar{a}} \cdot \bar{b} + (\bar{a} + \bar{b}) && \textit{(2-mal de Morgan)} \\
&= a \cdot \bar{b} + \bar{a} + \bar{b} && \textit{(wegen } \bar{\bar{a}} = a\textit{)} \\
&= \bar{a} + \bar{b} \cdot a + \bar{b} && \textit{(Kommutativgesetze)} \\
&= \bar{a} + \bar{b} \cdot a + \bar{b} \cdot 1 && \textit{(wegen } a = a \cdot 1\textit{)} \\
&= \bar{a} + \bar{b} \cdot (a + 1) && \textit{(Distributivgesetz)} \\
&= \bar{a} + \bar{b} && \textit{(wegen } a + 1 = 1\textit{)} \\
&= \overline{a \cdot b} && \textit{(de Morgan)}
\end{aligned}
$$

zu c):

optimierte Schaltung:



Wertetabelle:

a	b	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0