Eigenschaften der rekursiv definierten Fibonacci-Folge $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$

(1) $\mathbf{f(0) = 0 \ , \quad f(1) = 1}$
(2) $\mathbf{f(n) = f(n-1) + f(n-2)}$ falls $n > 1$

1. Die Folge $\{f(n)\}$ ist streng monoton wachsend für $n > 1$.
   Beweis:
   $f(n+1) - f(n) = f(n-1) > 0$ falls $n > 1$

2. Behauptung: $\mathbf{f(n) < 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^n}$ falls $n > 1$

   Beweis: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ $< 2 \cdot f(n-1)$ wegen der Monotonie
   $$< 2 \cdot 2 \cdot f(n-2) = 2^2 \cdot f(n-2)$$
   $$< 2^3 \cdot f(n-3)$$
   $$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
   $$< 2^{n-1} \cdot f(n-(n-1)) = 2^{n-1} \cdot f(1) = 2^{n-1}$$

3. Behauptung: $\mathbf{f(n) > \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^n}$ falls $n > 2$

   Beweis: n sei gerade mit $n = 2 \cdot m$, $m > 1$

   $f(2m) = f(2m-1) + f(2m-2)$
   $> 2 \cdot f(2m-2) = 2^1 \cdot f(2(m-1))$ wegen der Monotonie
   $$> 2 \cdot 2 \cdot f(2m-4) = 2^2 \cdot f(2(m-2))$$
   $$> 2^3 \cdot f(2(m-3))$$
   $$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
   $$> 2^{m-1} \cdot f(2(m-(m-1))) = 2^{m-1} \cdot f(2) = 2^{m-1}$$

   mit $m = n/2$ folgt:
   $$f(n) > 2^{n/2-1} = \tfrac{1}{2} \cdot 2^{n/2} = \tfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^n$$

4. Folglich erhalten wir für **f(n)** die Abschätzung

   $$\mathbf{\tfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^n < f(n) < \tfrac{1}{2} \cdot 2^n} \qquad \text{falls } n > 2$$

   Die Fibonacci-Folge wächst exponentiell mit n.

5. Das exponentielle Wachstum läßt sich auch an der für die Fibonacci-Folge geltenden Formel von Moivre-Binet ablesen:

   $$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

   Für große Werte von n kann man den Subtrahend gegenüber dem Minuend vernachlässigen.

6. Berechnet man die Fibonacci-Folge mit der rekursiv formulierten Funktion fib, erhält man für die Anzahl z(n) der Aufrufe von fib:

   $\mathbf{z(0) = z(1) = 1}$

   $\mathbf{z(n) = 1 + z(n-1) + z(n-2)}$, $n > 1$

   Wegen $z(n) \geq f(n)$ wächst auch z(n) exponentiell mit n.