DIE ACKERMANN-FUNKTION

Für m, n $\in \mathbb{N}_0$ ist die Ackermann-Funktion $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ wie folgt definiert:

1. Rekursionsanfang:

(1) **f(0,n) := n+1**

2. Rekursionsvorschrift:

(2) **f(m,0) := f(m-1,1)**
(3) **f(m,n) := f(m-1, f(m,n-1))**

f(0,0) = 1
f(0,1) = 2
f(0,2) = 3
f(1,0) = f(0,1) = 2
f(2,0) = f(1,1) = f(0,f(1,0)) = f(0,2) = 3
f(1,1) = f(0,f(1,0)) = f(0,2) = 3
f(1,2) = f(0,f(1,1)) = f(0,3) = 4
f(3,0) = f(2,1) = f(1,f(2,0)) = f(1,3) = f(0,f(1,2)) = f(0,4) = 5
f(3,7) = 1021
f(3,8) = 2045
$f(4,0) = 2^{2^{2}} - 3 = 13$
$f(4,1) = 2^{2^{2^{2}}} - 3 = 2^{16} - 3 = 65533$
$f(4,2) = 2^{2^{2^{2^{2}}}} - 3 = 2^{2^{16}} - 3 = 2^{65536} - 3$
f(4,4) = Dezimalzahl mit mehr als 10^{19199} Stellen

Aufgaben:

a) Scheibe ein rekursives Programm zur Berechnung der Ackermann-Funktion.
b) Zeige vermöge vollständiger Induktion:

$$f(1,n) = n + 2 = 2 + (n + 3) - 3$$
$$f(2,n) = 2(n + 3) - 3$$
$$f(3,n) = 2^{n+3} - 3$$
$$f(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{(n+3)\text{-mal}} - 3$$

BEWEISVERFAHREN DER VOLLSTÄNDIGEN INDUKTION

Für n $\in \mathbb{N}_0$ sei **A(n)** eine von n abhängige Aussage. Falls gilt:

(1) **A(0)** ist wahr
und
(2) die Implikation **[A(n) ⇒ A(n+1)]** ist wahr für alle n $\in \mathbb{N}_0$,

dann ist **A(n)** wahr für alle n $\in \mathbb{N}_0$.